

人教九年级数学上知识清单

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程



知识点一 一元二次方程的定义

1. 定义: 等号两边都是整式, 只含有一个未知数(一元), 并且未知数的最高次数是 2(二次)的方程, 叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程必须同时满足以下三个条件:

①是整式方程; ②只含有一个未知数; ③未知数的最高次数是 2.

知识点二 一元二次方程的一般形式

一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). 其中 ax^2 是二次项, a 是二次项系数; bx 是一次项, b 是一次项系数; c 是常数项.

知识点三 一元二次方程的解(根)

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值, 就是这个一元二次方程的解, 一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根.

例如: $x=3$ 和 $x=2$ 都是一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解(根).

温馨提示:

(1) 一元二次方程可以无解, 但是有解就一定有两个;

(2) 在一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 中,

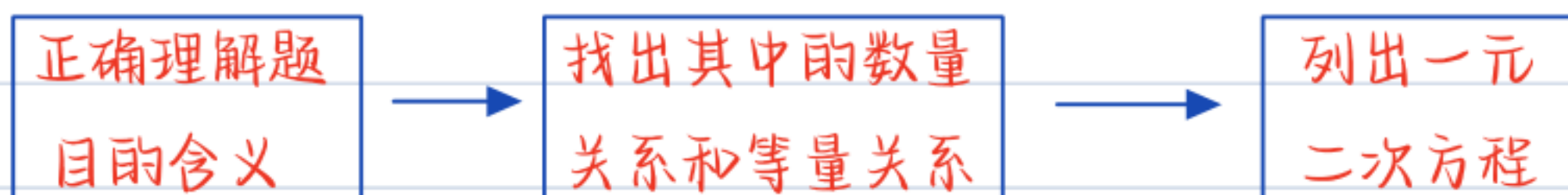
若 $a + b + c = 0$, 则 $x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一个根;

若 $a - b + c = 0$, 则 $x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一个根.

判断一个数值是不是一元二次方程的解的方法:

将此数值代入一元二次方程,若能使等式成立,则这个数值是一元二次方程的解;
反之,它就不是一元二次方程的解.

知识点四 列一元二次方程表示实际问题中的数量关系



易错点1 忽略一元二次方程概念中的条件

当一元二次方程的二次项系数及未知数的最高次数含字母时,必须保证二次项系数不为0,且未知数的最高次数为2.

易错点2 不能准确确定一元二次方程的各项及其系数

一元二次方程的各项系数是针对一元二次方程的一般形式定义的,因此确定一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项时,若方程不是一般形式,需将这个一元二次方程化为一般形式.注意:对各项系数的判断应包括它前面的符号.另外,一次项或常数项没有时,系数应为0.

21.2 解一元二次方程

21.2.1 配方法

第一课时 直接开平方法

知识点 直接开平方法解一元二次方程

利用平方根的定义直接开平方来求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法.

一般地，对于方程 $x^2=p$ 。

(1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程 $x^2=p$ 有两个不相等的实数根：

$$x_1 = -\sqrt{p}, x_2 = \sqrt{p};$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程 $x^2=p$ 有两个相等的实数根： $x_1 = x_2 = 0$ ；

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x ，都有 $x^2 \geq 0$ ，所以方程 $x^2=p$ 无实数根。

如果方程能化成 $x^2=p$ 或 $(mx+n)^2=p (p \geq 0)$ 的形式，那么可得 $x = \pm \sqrt{p}$ 或 $mx+n = \pm \sqrt{p}$ 。

温馨提示：

(1) 采用直接开平方法解一元二次方程的理论依据是平方根的定义，直接开平方法只适用于部分一元二次方程，它适用的方程是能转化为 $x^2=p$ 或 $(mx+n)^2=p (p \geq 0)$ 的方程。

(2) 利用直接开平方法解一元二次方程时，只有当 p 为非负数时，方程才有解，并且要注意开方的结果取“正、负”两种情况。

第二课时 配方法

知识点 配方法解一元二次方程

1. 定义：通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做配方法。

2. 用配方法解一元二次方程的一般步骤：

(1) 把含未知数的项移到方程的左边，常数项移到方程的右边；

(2) 如果一元二次方程的二次项系数不是1，就先将方程的两边同时除以二次项系数，把二次项系数化为1；

(3) 在方程的左右两边同时加上一次项系数一半的平方，这样使方程的左边配成一个完全平方式，右边是一个非负数的形式；

(4) 用直接降次的方法解这个一元二次方程。

简记为：一移，二化，三配，四解。

温馨提示:

(1)用配方法解一元二次方程,实质就是对一元二次方程进行变形,转化为开平方所需形式.配方是为了降次,利用平方根的定义把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解.

(2)一元二次方程的配方是两边同时除以二次项系数a,而二次三项式的配方法是提取二次项系数a,要注意区别.

21.2.2 公式法

第一课时 一元二次方程的根的判别式

知识点 一元二次方程的根的判别式

将 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 配方成 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 后,可以看出,只有当 $b^2-4ac\geq 0$ 时,方程才有实数根,这样 b^2-4ac 的值就决定着一元二次方程根的情况.

一般地,式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式,通常用希腊字母“ Δ ”表示它,即 $\Delta=b^2-4ac$.



Δ 的符号	方程根的情况	注意
$\Delta > 0$	方程有两个不相等的实数根。 即 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	(1)应用根的判别式时必须先将一元二次方程化成一般形式,然后准确确定a, b, c的值; (2)此判别式只适用于一元二次方程,当无法判定方程是不是一元二次方程时,应对方程进行分类讨论; (3)当 $b^2-4ac=0$ 时,方程有两个相等的实数根,不能说成方程有一个实数根
$\Delta = 0$	方程有两个相等的实数根。 即 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	
$\Delta < 0$	方程无实数根	

上面的结论反过来也成立，即当方程有两个不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ；

当方程有两个相等的实数根时， $\Delta = 0$ ；当方程没有实数根时， $\Delta < 0$ 。

温馨提示：

一元二次方程根的判别式主要有以下两点应用：

(1) 不解方程判断方程根的情况。(2) 根据方程根的情况求字母系数的取值范围。

第二课时 公式法解一元二次方程

知识点 公式法解一元二次方程

解一元二次方程时，可以先将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，当 $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的实数根可写为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的求根公式。

利用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法。

求根公式是用配方法解一元二次方程的结果，用它直接解方程避免了繁杂的配方过程，公式法是一种常用解法，并且适合于所有的一元二次方程。

一元二次方程求根公式的推导过程就是用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的过程。

用公式法解一元二次方程的一般步骤：

1. 把方程化为一般形式，确定 a, b, c 的值(注意符号)。

2. 求出 $\Delta = b^2-4ac$ 的值。

3. 当 $b^2-4ac > 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根，即

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

当 $b^2-4ac = 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 有两个相等的实数根，即

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 无实数根.

温馨提示:

(1) 只有当能确定方程是一元二次方程时, 才能使用此求根公式,

(2) $b^2 - 4ac \geq 0$ 是一元二次方程求根公式的重要组成部分, 是公式成立的前提条件

21.2.3 因式分解法

知识点一 因式分解法解一元二次方程

1. **因式分解法的定义**: 先因式分解, 使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式, 再使这两个一次式分别等于 0, 从而实现降次, 这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

2. **因式分解法的理论依据**: 两个因式的积等于 0, 则这两个因式中至少有一个等于 0. 用式子表示为: 若 $a \cdot b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

3. **用因式分解法解一元二次方程的步骤**:

(1) 将方程化为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的形式,

(2) 将方程的左边分解为两个一次因式的积;

(3) 令每个因式分别等于 0, 得到两个一元一次方程;

(4) 解这两个一元一次方程, 它们的解就是方程的解.

温馨提示:

(1) 如果一个二项式, 它能够化成两个整式的平方差, 就可以用平方差公式分解因式, 分解成两个整式的和与差的积;

(2) 等式的左边有三项, 其中两项符号为“+”, 都是一个整式的平方, 还有一项符号可能为“+”也可能为“-”, 除符号外它是那两项算术平方根乘积的两倍. 凡具备这些特点的三项式, 就是一个二项式的完全平方, 将它写成平方形式, 便实现了因式分解.

知识点二 用适当的方法解一元二次方程

解一元二次方程的方法有：

直接开平方法、因式分解法、配方法和公式法。

温馨提示：

(1) 当一个一元二次方程的一边为零，而另一边可以分解成两个一次式的积时，就可以运用因式分解法求解。

(2) 如果一个一元二次方程的一边是含有未知数的平方式，另一边是一个非负数，就可以直接开平方求解。

(3) 当不易使用因式分解法，且方程中的系数绝对值较大时，我们考虑使用配方法解方程。

(4) 公式法是解决一元二次方程的通用方法，当其他方法都不易解决时，我们考虑使用公式法解题。

易错点 解方程时方程两边同除以含未知数的相同因式而失根

方程两边都有含某个未知数的相同因式时，有的同学易认为在方程两边同除以这个相同的因式，可使得方程降次，这是一种错误的做法。因为在方程两边同除以这个相同的因式时，不能保证它的值不是0，从而使得方程丢根。因此不要 轻易在方程两边除以某个含有未知数的式子，最好的方法是把它作为公因式提出来分解因式。

21.2.4 一元二次方程的根与系数的关系

知识点一 一元二次方程的根与系数的关系

一元二次方程的根与系数的关系：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$ ， $b^2-4ac \geq 0$) 的两个实数根为 x_1, x_2 ，则 $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ，即任何一个一元二次方程两个根的和等于一次项系数与二次

项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比。

不解方程，利用一元二次方程根与系数的关系求代数式的值的常见

代数变形有：

$$(1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$(2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$(3) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

$$(4) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

$$(5) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

知识点二 一元二次方程的根与系数的关系的应用

1. 如果 x_1, x_2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根，那么 $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

2. 以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为1)是：

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

3. 利用一元二次方程根与系数的关系求方程中字母系数的值时，不要忘记将字母代回原方程验证，需满足 $\Delta > 0$ ，因为根与系数的关系是在一元二次方程根的判别式大于或等于0的前提下使用的。

21.3 实际问题与一元二次方程

第一课时 传播问题、增长率问题与营销问题

知识点一 传播问题

传播问题：

传播源 + 第一轮被传播的 + 第二轮被传播的 = 第二轮传播后的总数。

知识点二 增长率问题

平均增长率问题：

此类问题是在某个数据的基础上连续增长(降低)两次得到新的数据, 解这类问题需牢记公式 $a(1+x)^2=b$ 或 $a(1-x)^2=b$, 其中 a 表示增长或降低前的数据, x 表示增长或降低率, b 表示后来得到的数据, “+”表示增长, “-”表示降低.

知识点三 营销问题

解决此类问题首先要清楚几个名称的意义, 如成本价、售价、标价、打折、利润、利润率等以及它们之间的等量关系.

此类问题常见的等量关系是:

总利润 = 总售价 - 总成本, 或总利润 = 每件商品的利润 \times 销售数量,

利润率 = $\frac{\text{售价} - \text{进价}}{\text{进价}} \times 100\%$.

进价

第二课时 图形问题、数字问题与体育比赛问题

知识点一 图形问题

几何图形应用题关键是将不规则图形分割或组成规则图形, 找出未知量与已知量的内在联系. 根据面积和体积公式列出方程.

知识点二 数字问题

若一个两位数的十位数字和个位数字分别是 x , y . 则这个数可表示为 $10x + y$. 若一个三位数的百位数字、十位数字、个位数字分别是 x 、 y 、 z , 则这个数字可表示为 $100x + 10y + z$.

知识点三 体育比赛问题

每两个队之间都要比赛一场, 无主客场之分(通俗的说法就是除了不和自己比赛, 其他人都要比), 一共比赛的场数 = $(\text{队数} - 1) \times \text{队数} \div 2$. 体育比赛问题同握手问题的道理是相同的.

人教九年级数学上知识清单

第二十二章

二次函数

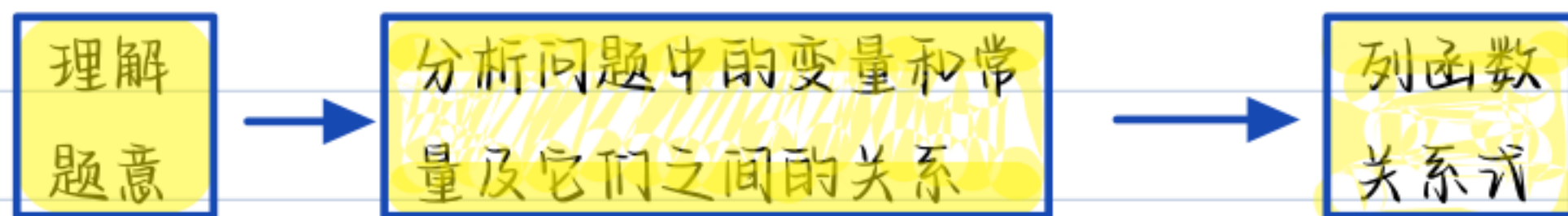
22.1 二次函数的图像和性质

22.1.1 二次函数

知识点一 二次函数的定义

1. **二次函数的定义**：一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 的函数，叫做二次函数。
2. 二次函数的**一般式的定义**：任何一个二次函数的解析式，都可以化成 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 的形式，因此，把 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 叫做二次函数的一般式。
3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 中， x, y 是变量， a, b, c 是常量. 自变量 x 的取值范围是全体实数， b 和 c 可以是任意实数， a 必须是不等于 0 的实数。

知识点二 实际问题中的二次函数



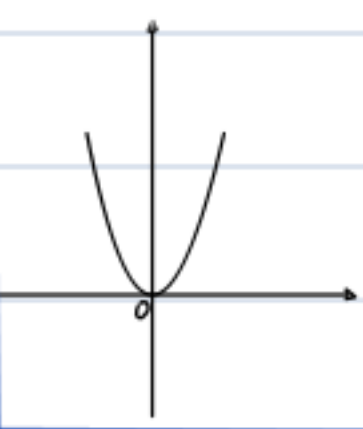
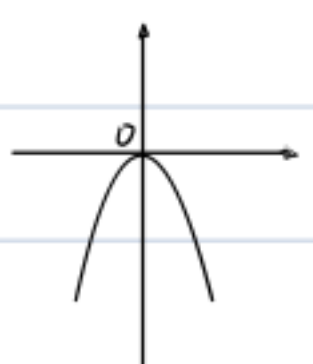
易错点 确定二次函数解析式中字母参数的值时易出错

由二次函数的定义确定二次函数解析式中字母参数的值时，易只考虑次数最高的项的次数为 2，而忽略二次项系数不为 0 对字母参数的取值的限制。

22.1.2 二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

知识点 二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

1. **二次函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的性质** 可列表归纳如下：

函数	图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性	最大(小)值
$y = ax^2$ ($a > 0$)		向上	$(0, 0)$	y轴	$x > 0$ 时, y 随 x 增大而增大; $x < 0$ 时, y 随 x 增大而减小	当 $x = 0$ 时, y 最小值 $= 0$.
$y = ax^2$ ($a < 0$)		向下	$(0, 0)$	y轴	$x > 0$ 时, y 随 x 增大而减小; $x < 0$ 时, y 随 x 增大而增大	当 $x = 0$ 时, y 最大值 $= 0$.

温馨提示:

抛物线是一个轴对称图形, 开口方向、对称轴、顶点通常被称为抛物线的三要素.

2. 抛物线 $y = ax^2$ 开口方向, 大小与系数 a 的关系

(1) a 的符号决定抛物线开口方向, a 为正, 开口向上; a 为负, 开口向下.

(2) $|a|$ 的大小决定抛物线开口的大小, $|a|$ 越大, 开口越小; $|a|$ 越小, 开口越大.

3. 抛物线 $y = ax^2$ 上点的坐标特征

由于抛物线 $y = ax^2$ 关于 y 轴对称, 所以若点 $A(x, y)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 的图象上, 则点 $A'(-x, y)$ 也在抛物线 $y = ax^2$ 的图象上.

温馨提示:

(1) 由于 x 可取一切实数, 所以描点法所画的图象只是整个函数图象的一部分, 是近似的图象, 图象应是向两方无限延伸的;

(2) 点取的越多, 图象画的越精确;

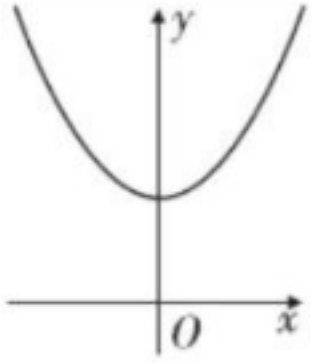
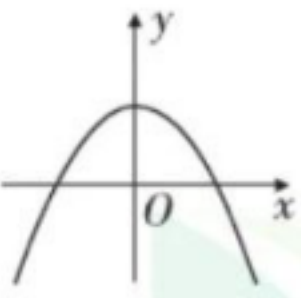
(3) 图象必须平滑.

22.1.3 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

第一课时 二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象和性质

知识点一 二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象和性质

二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象与性质总结如下：

a 的符号	$a > 0 (k > 0)$	$a < 0 (k > 0)$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	y 轴	y 轴
顶点坐标	$(0, k)$	$(0, k)$
增减性	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x = 0$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小值}} = k$	当 $x = 0$ 时, y 有最大值, $y_{\text{最大值}} = k$

注意：

- (1) 抛物线 $y = ax^2$ 平移的方向和距离取决于 k 的值. 当 $k > 0$ 时, 将抛物线 $y = ax^2$ 向上平移 k 个单位, 得抛物线 $y = ax^2 + k$; 当 $k < 0$ 时, 将抛物线 $y = ax^2$ 向下平移 $|k|$ 个单位, 得抛物线 $y = ax^2 + k$.
- (2) 函数值 y 随 x 的变化情况分 $x > 0$ 与 $x < 0$ 两种情况.
- (3) 函数有最大值还是最小值取决于 a 的符号.

知识点二 二次函数 $y = ax^2 + k$ 与 $y = ax^2$ 的图象之间的平移

当 $k > 0$ 时, $y = ax^2 + k$ 是将 $y = ax^2$ 的图象向上平移 k 个单位得到的;

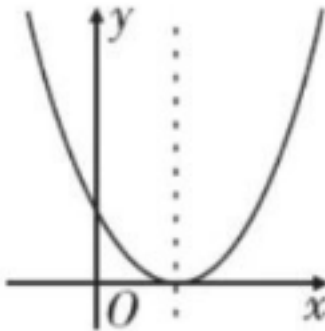
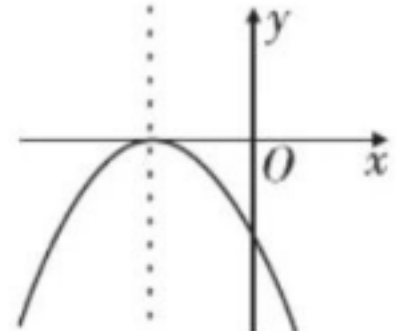
当 $k < 0$ 时, $y = ax^2 + k$ 是将 $y = ax^2$ 的图象向下平移 $|k|$ 个单位得到的.

在抛物线的平移过程中, 因为抛物线上任意一点的平移情况都是一致的, 故常以点代线, 通过研究顶点的平移情况来研究整条抛物线的平移情况.

第二课时 二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象和性质

知识点一 二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象和性质

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质总结如下：

a 的符号	$a>0(h>0)$	$a<0(h<0)$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	$x=h$	$x=h$
顶点坐标	$(h, 0)$	$(h, 0)$
增减性	当 $x<h$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x>h$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x<h$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x>h$ 时, y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小值}}=0$	当 $x=h$ 时, y 有最大值, $y_{\text{最大值}}=0$

知识点二 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 图象之间的平移

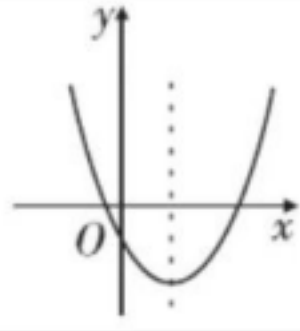
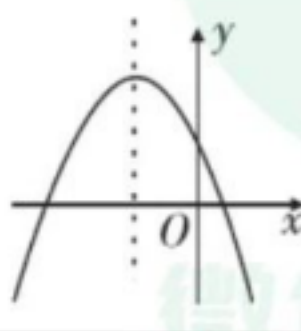
当 $h>0$ 时, $y=a(x-h)^2$ 是将 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位得到的.

当 $h<0$ 时, $y=a(x-h)^2$ 是将 $y=ax^2$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位得到的.

第三课时 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

知识点一 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质总结如下：

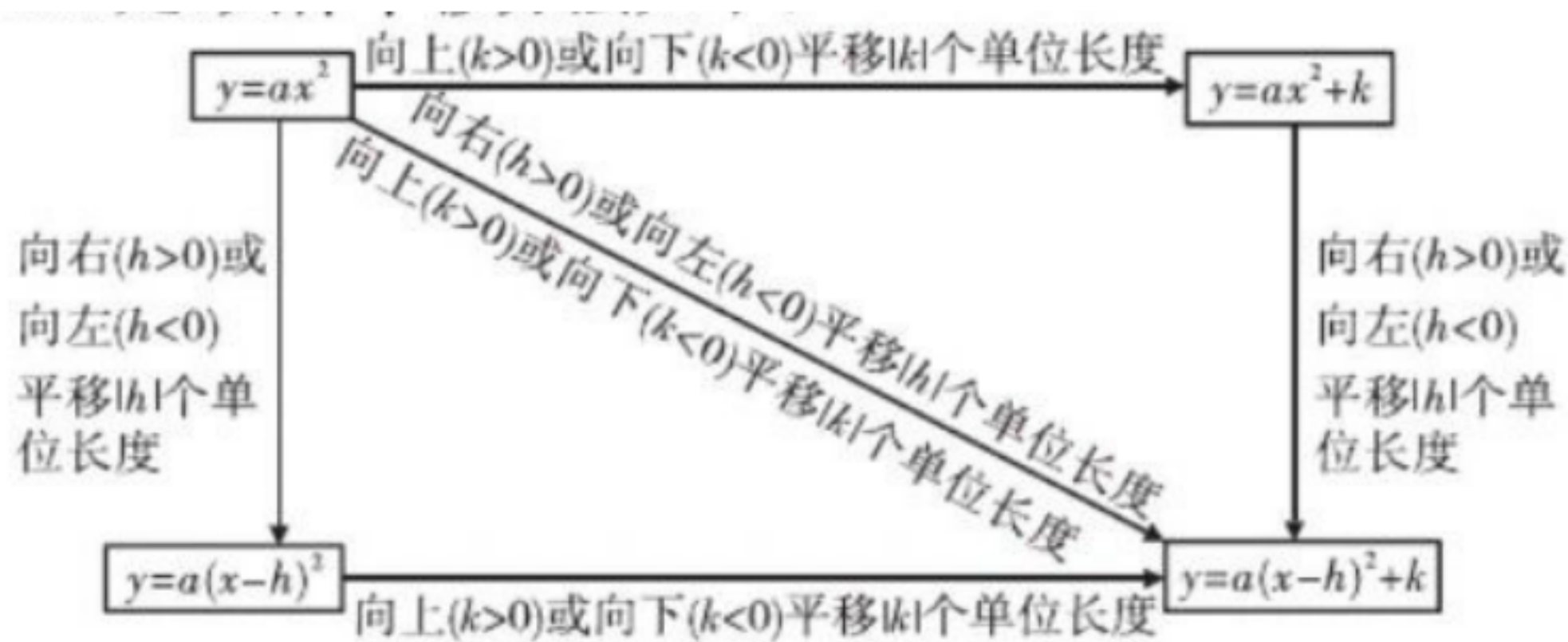
a 的符号	$a>0(h>0, k<0)$	$a<0(h<0, k>0)$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	$x=h$	$x=h$
顶点坐标	(h, k)	(h, k)

增减性	当 $x<h$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x>h$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x<h$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x>h$ 时, y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小值}}=k$	当 $x=h$ 时, y 有最大值, $y_{\text{最大值}}=k$

知识点二 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的平移

抛物线 $y=ax^2$ 平移到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的方法:

保持抛物线 $y=ax^2$ 的形状不变, 将其顶点平移到 (h, k) 处, 具体平移方法如下:



温馨提示:

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的平移是在函数 $y=ax^2$ 图象的基础上

“ h 值正左移, 负右移; k 值正上移, 负下移”.

易错点 混淆点的平移、坐标轴的平移和二次函数图象平移的规律

点的平移规律是“左减右加, 上加下减”, 点的左右平移规律和图象的左右平移恰好相反, 学习过程中, 应注意区分. 同时应注意坐标轴的平移过程和二次函数图象的平移过程是互逆的.

22.1.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

第一课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

知识点一 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

利用二次函数图象平移的规律求平移后的函数的解析式, 首先要将

函数解析式化为顶点式: $y=a(x-h)^2+k$.

知识点二 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是一条抛物线，与抛物线 $y=ax^2$ 的形状相同，位置不同，利用配方法可以将 $y=ax^2+bx+c$ 转化为顶点式，即

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质

(1) 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 。当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时， y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

(2) 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 。当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时， y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

知识点三 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与系数 a, b, c 之间的关系

系数	图象的特征	系数的符号
a	开口向上	$a>0$
	开口向下	$a<0$
b	对称轴为 y 轴	$b=0$
	对称轴在 y 轴左侧	a, b 同号
	对称轴在 y 轴右侧	a, b 异号
c	经过原点	$c=0$
	与 y 轴正半轴相交	$c>0$
	与 y 轴负半轴相交	$c<0$

第二课时 求二次函数的解析式

知识点 用待定系数法求二次函数解析式

根据已知条件确定二次函数解析式，通常利用待定系数法。用待定系数法求二次函数的解析式必须根据题目的特点，选择适当的形式，才能

使解题简便.

利用待定系数法求二次函数的解析式时, 一般有以下几种情况

($a \neq 0$):

(1) 顶点在原点, 可设为 $y = ax^2$;

(2) 对称轴是 y 轴(或顶点在 y 轴上), 可设为 $y = ax^2 + k$;

(3) 顶点在 x 轴上(或抛物线与 x 轴只有一个交点), 可设为 $y = a(x - h)^2$;

(4) 抛物线过原点, 可设为 $y = ax^2 + bx$;

(5) 已知顶点 (h, k) 时, 可设顶点式为 $y = a(x - h)^2 + k$;

(6) 已知抛物线上三点坐标时, 可设一般式为 $y = ax^2 + bx + c$;

(7) 已知抛物线与 x 轴两交点坐标为 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ 时, 可设交点式为 $y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

温馨提示:

(1) 已知抛物线上三点的坐标, 一般选用一般式;

(2) 已知抛物线顶点坐标或对称轴或最大(小)值, 一般选用顶点式;

(3) 已知抛物线与 y 轴两个交点的横坐标, 一般选用交点式;

(4) 已知抛物线上纵坐标相同的两点, 常选用顶点式.

22.2 二次函数与一元一次方程

知识点一 二次函数与一元二次方程的关系

1. 二次函数与一元二次方程的关系(二次函数图象与 x 轴的交点情况):

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 当函数值 $y = 0$ 时的特殊情况.

2. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴一定相交, 交点坐标为 $(0, c)$.

知识点二 用二次函数的图象解一元二次方程

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 可以看成是二次函数

$y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的函数值等于 0 时的特殊情况，因此抛物线

$y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 与 x 轴交点的横坐标就是一元二次方程

$ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的根。

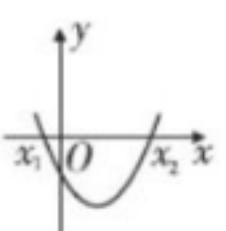
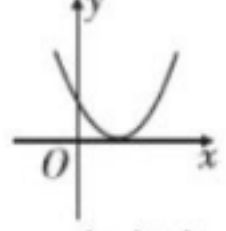
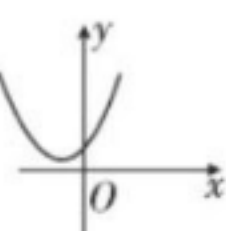
用二次函数的图象解一元二次方程的近似根时，根的整数部分可以观察图象得到，根的小数部分的探求需用到函数的性质。当 x 取 x_1, x_2 时，若对应的 y_1, y_2 异号，则方程必有一根在 x_1 与 x_2 之间，据此采用逐步逼近的方法能使得到的根的精确度越来越高。

知识点三 二次函数与一元二次不等式的关系

求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，就是求 x 为何值时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的

函数值 $y>0$ ；求不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集，就是求 x 为何值时，二次函数

$y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$ 。具体如下表：(以 $a>0$ 为例)

b^2-4ac 的符号		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象 与 x 轴的交点		 两个交点	 一个交点 (即顶点)	 没有交点
$ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的根		两不等实数根 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	两相等实数根 $x = -\frac{b}{2a}$	无解
一元二次不等式	$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	全体实数
	$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)	$x_1<x<x_2$	无解	无解

温馨提示：

由二次函数的图象确定一元二次不等式解集的关键是找出二次函数图象与 x 轴的交点。图象在 x 轴上方的部分，所对应的自变量 x 的取值范围就是一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0$ 的解集。图象在 x 轴下方的部分，所对应的自变量 x 的取值范围就是一元二次不等式

$ax^2+bx+c<0$ 的解集。

22.3 实际问题与二次函数

第一课时 图形面积的最值问题

知识点一 求二次函数的最大(或最小)值

将二次函数解析式配方成顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 即可得出最大(最小)值. $a>0$ 时, k 是最小值; $a<0$ 时, k 是最大值.

知识点二 利用二次函数求图形面积的最值问题

“求最大面积”的问题是二次函数的一类应用题,首先要分析几何图形,求得两个变量(其中一个变量为图形的面积)之间的二次函数关系,然后利用二次函数的性质求最大面积.

“求最大面积”的问题是代数、几何的综合题,涉及的图形有三角形、平行四边形、矩形、菱形、正方形等,因此深入研究几何图形的大小关系、列出关于两个变量的关系式尤为重要.

第二课时 销售中的最值问题

知识点 二次函数的最值在销售问题中的应用

利用二次函数解决实际生活中的利润问题,应认清变量所表示的实际意义,注意隐含条件的使用,同时考虑问题要全面.

此类问题一般是先运用“总利润=总售价-总成本”或“总利润=每件商品所获利润 \times 销售数量”,建立利润与价格之间的二次函数解析式,求出这个函数解析式的顶点坐标,即求得最大利润.

第三课时 “抛物线”型最值问题

知识点 利用二次函数解“抛物线”型问题

	常见情形	具体方法
抛物线形建筑物	常见的抛物线形建筑物有拱形桥洞、涵洞、隧道洞门、拱形门窗等	(1)建立适当的平面直角坐标系,将抛物线形状的图形放置在坐标系中; (2)从已知和图象中获得求二次函数解析式所需要的条件; (3)利用待定系数法求出抛物线的解析式; (4)运用已求出的抛物线的解析式去解决相关问题
运动路线问题	运动员空中跳跃轨迹、球类运行的轨迹、喷头喷出的水的轨迹等	
解题技巧	一般把抛物线的顶点作为坐标系的原点建立平面直角坐标系,用待定系数法求二次函数的解析式时,可设解析式为 $y=ax^2$	

人教九年级数学上知识清单

第二十三章 旋转

23.1 图形的旋转

第一课时 图形的旋转及性质



知识点一 旋转的定义及相关概念

1. **旋转的定义**：一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度，叫做图形的旋转；点 O 叫做旋转中心，转动的角叫做旋转角。
2. **对应点的定义**：如果图形上的点 P 经过旋转变成为点 P' ，那么这两个点叫做这个旋转的对应点。
3. **图形旋转的三要素**：旋转中心、旋转方向、旋转角。

温馨提示：

- (1) 旋转不改变图形的形状和大小，只是图形位置发生了变化；
- (2) 每一点都绕旋转中心沿相同方向转动了相同的角度；
- (3) 任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都是旋转角。

知识点二 旋转的性质

1. 对应点到旋转中心的距离相等。
2. 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。
3. 旋转前、后的图形全等。

注意：

利用旋转的性质解决问题时应注意：

- (1) 明确旋转中的“变”与“不变”；

(2)明确旋转前后的“对应关系”；

(3)明确旋转过程中的线段或角之间的关系。

易错点：不能正确确定旋转中心

在图形的旋转过程中，判断旋转中心，要看旋转中心是在图形上还是不在图形上，若在图形上，哪一点在旋转过程中位置没有改变，哪一点就是旋转中心；若不在图形上，对应点所连线段垂直平分线的交点就是旋转中心，对于有公共顶点的两个图形，有时会将该公共顶点误认为就是旋转中心。

第二课时 旋转作图

知识点一 旋转作图

对于同一个图案，如果选择的旋转中心、旋转角不相同，会出现不同的旋转效果。

旋转作图时，一定要先确定图形的“关键点”，将每个关键点绕“旋转中心”按规定的“方向”旋转一定的“角度”得到新的“关键点”，便可连成旋转后的图形。

具体步骤分以下五步：

①连：连接图形中每一个关键点与旋转中心。

②转：把连线按要求绕旋转中心转过一定角度（作旋转角）。

③截：在角的另一边上截取与关键点到旋转中心的距离相等的线段，得到各点的对应点。

④连：连接所得到的各对应点。

⑤写出结论，说明作出的图形。

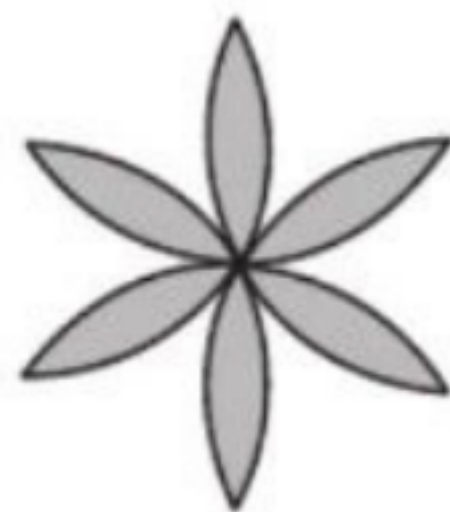
知识点二 用旋转变换设计图案

旋转作图在平面图案的设计中有广泛的应用，生活中随处可见。

例1：请分析如图所示图案的形成过程

解析：

确定“基本图案”为一个叶片两个叶片或三个叶片均可，利用平移、旋转、轴对称的组合可以得到该图案，以下两种解法仅供参考。



解法1：

把图案中的一个“叶片”看作是“基本图案”，以整个图案的中心为旋转中心，按顺时针方向分别旋转 60° ， 120° ， 180° ， 240° ， 300° 即可得到该图案。

解法2：

把图案中相邻两个“叶片”看作是“基本图案”，以整个图案的中心为旋转中心，按顺时针方向分别旋转 120° ， 240° 即可得到该图案。

注意：

分析该图案的形成过程，要先确定“基本图案”，再观察旋转中心、旋转方向及旋转角，从而得到该图案的形成过程。

易错点：忽视旋转方向对旋转变换所起的作用

画旋转图形时容易忽视对旋转方向的要求，除了旋转中心及旋转角之外，还应指明旋转方向是顺时针还是逆时针，若无特别说明，则应考虑两种情况。

23.2 中心对称

23.2.1 中心对称

知识点一 中心对称的定义

定义=把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果它能够与另一个图形重合，那么就说明这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫做对称中心.这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的对称点.

温馨提示：

- (1)中心对称是指两个图形间的位置关系。
- (2)中心对称是特殊的旋转，旋转角为 180°
- (3)中心对称与轴对称的区别在于对称方式和变换方式不同.

知识点二 中心对称的性质

1.中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分.

2.中心对称的两个图形是全等图形.

注意=中心对称的两个图形是全等图形，则对应边相等，对应角相等，周长、面积都相等.

知识点三 中心对称的作图

画图步骤：

- (1)确定已知图形和旋转中心;
- (2)选定关键点;
- (3)分别画出关键点的对称点;
- (4)依次连接各关键点的对称点，得已知图形的中心对称图形.

23.2.2 中心对称图形

知识点一 中心对称图形的概念

把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。

注意：

(1) 中心对称图形是一个具有特殊特征的图形；

(2) 中心对称图形的对称中心一定在图形内；

(3) 经过对称中心的任意一条直线将中心对称图形分成两个图形，这两个图形关于对称中心成中心对称；

(4) 把成中心对称的两个图形视为一个整体，则成为中心对称图形。

知识点二 中心对称图形的性质

1. 对称点的连线被对称中心平分

2. 经过中心对称图形的对称中心的任意一条直线都将图形分成全等的两部分。

易错点 对常见平面几何图形是不是中心对称图形分辨不清

在常见的平面几何图形中，是轴对称图形的有角、等腰三角形、等腰梯形等，是中心对称图形的有线段、平行四边形等；既是轴对称图形又是中心对称图形的有线段、矩形、菱形、正方形、圆等。

23.2.3 关于原点对称的点的坐标

知识点一 关于原点对称的点的坐标

在平面直角坐标系中，如果两个点关于原点对称，那么它们的坐标符号相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$ 。

知识点二 关于原点对称的点的坐标的应用

根据关于原点对称的点的坐标特征求出图形中关键点的对称点的坐标，在平面直角坐标系中根据坐标描出这些点，按照原图顺序连接作出的点得到求作的图形。

23.3 课题学习 图案设计

知识点一 分析图案的形成过程

图案的设计与日常生活息息相关，它通常是利用基本图形的变换来进行图案设计，图形之间的基本变换有轴对称、平移、旋转这三种基本形式，这三种变换都有一个共同特征，那就是变换前后图形的形状、大小不发生变化，只有位置发生了变化，它们都属于全等变换。图案的设计较多的形式都是经过组合变化而成的。

两种图形变换的组合形式包括以下六种：

- (1) 先平移后旋转；
- (2) 先旋转后平移；
- (3) 先旋转后轴对称；
- (4) 先轴对称后旋转；
- (5) 先平移后轴对称；
- (6) 先轴对称后平移。

在利用图形之间的变换进行图案设计时，我们要对图形的变换特征

有清楚的认识，充分利用图形之间的变换，在进行图案的设计时注意弄清设计的要求及设计的目的，只有在正确把握设计要求及设计目的的条件下，才能合理地进行图案设计。

知识点二 设计图案

设计依据：应用平移、轴对称、旋转变换进行图案设计。

设计步骤：

(1)明确设计意图；

(2)确定基本图形和整体图案；

(3)运用平移、轴对称、旋转分析整体图案是如何通过“基本图形”变换形成的。

人教九年级数学上知识清单

第二十四章 圆

24.1 圆的有关性质

24.1.1 圆



知识点一 圆的概念

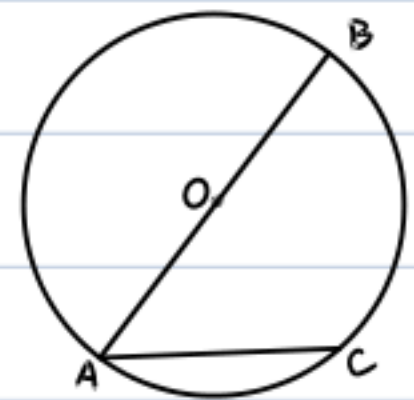
圆的描述性概念：在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆。其固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径。

圆的集合性概念：圆心为 O 、半径为 r 的圆可以看成是所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合。

圆的表示法：以点 O 为圆心的圆，记作“ $\odot O$ ”，读作“圆 O ”。

知识点二 与圆有关的概念及简单计算

如图，(1)连接圆上任意两点的线段叫做弦，如线段 AC ， AB ；



(2)经过圆心的弦叫做直径，如线段 AB ；

(3)圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧，“以 A ， C 为端点的弧记作 \widehat{AC} ”，读作“圆弧 AC ”或“弧 AC ”圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆。

大于半圆的弧(如 \widehat{ABC})叫做优弧，小于半圆的弧(如 \widehat{AC} 或 \widehat{BC})叫做劣弧。

(4)能够重合的两个圆叫做等圆，在同圆或等圆中，能够重合的弧叫做等弧。

知识点一 圆的对称性

圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是圆的对称轴。

注意：圆的对称轴不是直径，而是直径所在的直线。

知识点二 垂径定理及其推论

1. **垂径定理：**垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

2. **推论：**平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

温馨提示：

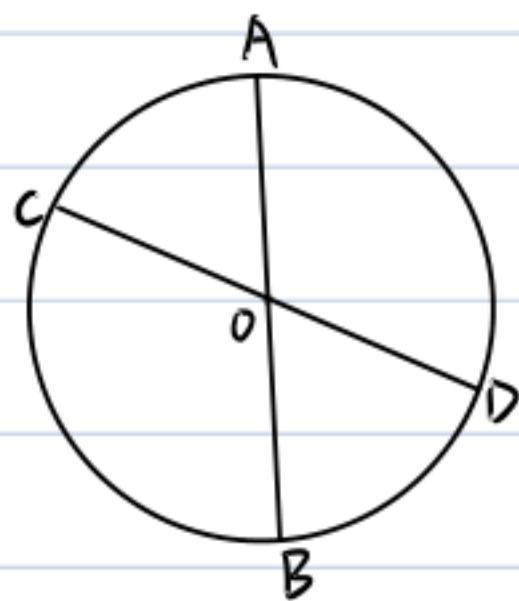
(1) 定理中“垂直于弦的直径”可以是直径，

也可以是半径，甚至可以是过圆心的直线或线段。

(2) 推论中“平分弦”的“弦”一定是非直径的弦，

否则命题就不一定成立了。如图所示，当弦CD为

直径时，AB平分CD于点O，但结论不成立。



(3) 利用垂径定理及其推论可以证明两条弧

相等，一条弦垂直平分另一条弦、一条线段是直径。

知识点三 垂径定理的应用

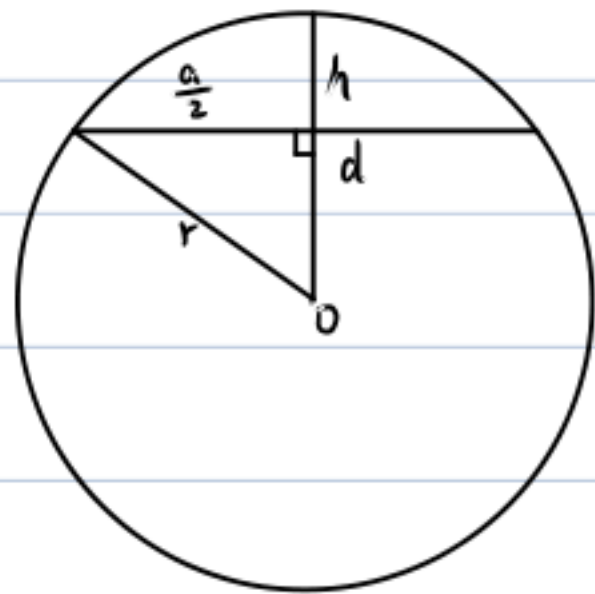
在垂径定理的运用中，常涉及弦长 a 、弦心距 d

（圆心到弦的距离）、半径 r 及弓形高 h （弦所对的弧的

中点到弦中点的距离）这四者之间的关系。应用时，

构造直角三角形，利用勾股定理求解。如图所示，

它们的关系为 $r^2 = d^2 + (\frac{a}{2})^2$ ， $r = d + h$ 。



24.1.3 垂直于弦的直径

知识点一 圆心角的概念及其计算

定义：顶点在圆心的角叫做圆心角。

知识点二 弧、弦、圆心角之间的关系

1. **有关弧、弦、圆心角关系的定理**：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等。

2. **定理的推论**：在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等。

3. 在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧和劣弧分别相等。

温馨提示：

在同圆或等圆中，两条弧（一般同为优弧或劣弧）、两条弦、两个圆心角中，只要有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也分别相等。

在运用弦、弧、圆心角之间的关系时，注意根据具体的需要选择有关部分，本题只需由两弧相等得到两弦相等就可以了。

24.1.4 圆周角

知识点一 圆周角及圆周角定理

1. **定义**：顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角。

圆周角必须具备两个特征：(1) 顶点在圆上；(2) 两边都与圆相交。

温馨提示：同一条弧所对的圆周角有无数个。

2. **圆周角定理**：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

注意：

已知圆中的同弧所对的圆周角和圆心角，可利用它们之间的倍数关系求值或转化。

知识点二 圆周角定理的推论

圆周角定理的推论：同弧或等弧所对的圆周角相等；半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径。

温馨提示：

(1) 在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等那么它们所对的弧相等，所对的弦相等。

(2) 在同圆和等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦及两个圆周角中有一组量相等，它们所对应的其余各组量也相等。

(3) 如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

注意：

在圆中出现直径，由圆周角定理的推论可知直径所对的圆周角等于 90° ，在直角三角形中，可利用直角三角形的两锐角互余计算角的度数，利用勾股定理计算边的长度。

知识点三 圆内接四边形的性质

1. **圆内接多边形**：如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形的外接圆。

2. **圆内接四边形的性质**：圆内接四边形的对角互补。

温馨提示：

(1) 内接和外接是一个相对的概念，是一种位置关系。

(2) 每一个圆有无数个内接四边形，但并不是所有的四边形都存在外接圆，只有对角互补的四边形才存在外接圆。

(3) 圆内接四边形的每一个外角

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

24.2.1 点和圆的位置关系

知识点一 点和圆的位置关系

点和圆的位置关系有三种：点在圆外，点在圆上，点在圆内。

设圆的半径为 r ，点到圆心的距离为 d ，则点在圆外 $\Leftrightarrow d > r$ ；

点在圆上 $\Leftrightarrow d = r$ ；点在圆内 $\Leftrightarrow d < r$ 。

说明：符号“ \Leftrightarrow ”读作“等价于”。“ $A \Leftrightarrow B$ ”具有两方面的含义：一方面表示“ $A \rightarrow B$ ”，即由 A 推出 B ；另一方面表示“ $B \rightarrow A$ ”，即由 B 推出 A 。

注意：判断点和圆的位置关系，关键是先确定点到圆心的距离 d 和圆的半径 r 两个量，然后根据 d 和 r 的大小判断点和圆的位置关系。

知识点二 过已知点作圆

过已知一点可作无数个圆；过已知两点也可作无数个圆；过不在同一条直线上的三点可以作一个圆，并且只能作一个圆。

温馨提示：

判断三个点能不能确定一个圆，就是看这三个点是不是在同一条直线上，经过同一条直线上的三个点不能作圆，不在同一条直线上的三个点能确定一个圆。

知识点三 三角形的外接圆与外心

1. 经过三角形的三个顶点可以作一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆，这个三角形叫做这个圆的内接三角形。

2. 外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，叫做这个三角形的外心。

知识点四 反证法

假设命题的结论不成立，由此经过推理得出矛盾，由矛盾断定所作

假设不正确.从而得到原命题成立,这种证明命题的方法叫做反证法.

用反证法证明命题一般有下面三个步骤:

- (1)假设命题的结论不成立;
- (2)从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;
- (3)由矛盾判定假设不正确,从而肯定原命题的结论正确.

24.2.2 直线和圆的位置关系

第一课时 直线和圆的位置关系—相交、相切、相离

知识点一、二 直线和圆的位置关系的判定与性质

1.直线和圆有三种位置关系:相离、相切和相交。

(1)相交的定义:直线和圆有两个公共点,称这条直线和圆相交,这条直线叫做圆的割线.

(2)相切的定义:直线和圆只有一个公共点,称这条直线和圆相切,这条直线叫做圆的切线,这个点叫做切点.

(3)相离的定义:直线和圆没有公共点,称这条直线和圆相离.

2.直线和圆的位置关系的判定:设圆的半径为 r ,圆心到直线的距离为 d ,则直线与圆相交 $\Leftrightarrow d < r$,直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r$,直线与圆相离 $\Leftrightarrow d > r$.

温馨提示:

- (1)直线和圆的位置关系,可以用直线和圆的公共点的个数来判定,也可以用圆心到直线的距离(d)与半径(r)的大小关系来判定;
- (2)直线和圆的位置关系与点和圆的位置关系既有联系,又有区别,两者都是根据 d 与 r 的数量关系来判定图形的位置关系的,但前者中的 d 为圆心到直线的距离,后者中的 d 为点与圆心的距离.

第二课时 直线和圆的位置关系—切线

知识点一 切线的判定

1. 切线的定义: 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

2. 证明直线是圆的切线的步骤:

(1) 确定直线与圆是否有公共点;

(2) 若有公共点, 则连接过公共点的半径(或直径), 证明半径(或直径)与这条直线垂直. 若没有公共点, 则过圆心作这条直线的垂线段, 证明该垂线段的长等于半径.

注意:

证明一条直线是圆的切线, 题目给出了直线与圆的公共点, 但未给出过这点的半径, 故要“连半径, 证垂直”.

知识点二 切线的性质

圆的切线垂直于过切点的半径

温馨提示:

已知圆的切线时, 常连接圆心和切点, 得到半径垂直于切线, 通过构造直角三角形来解决问题, 即“见切线, 连半径, 得垂线”.

第三课时 直线和圆的位置关系—切线长

知识点一 切线长定理

1. 切线长的定义: 经过圆外一点的圆的切线上, 这点和切点之间线段的长, 叫做这点到圆的切线长.

2. 切线长定理: 从圆外一点可以引圆的两条切线, 它们的切线长相等, 这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

注意:

切线长定理包含两个方面:

- 一是从圆外一点引的这两条切线长相等;
- 二是这点和圆心的连线平分这两条切线的夹角.切线长相等可以判断两条线段相等, 连线平分夹角可以证明角相等和求角的度数.

知识点二 三角形的内切圆与内心

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆. 三角形三个内角的平分线的交点为圆心, 这点到三角形三边的距离相等, 这个距离为半径, 圆心和半径都确定的圆只有一个, 并且只能作出一个, 这个内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点, 叫做三角形的内心.

“切”是说明三角形的边与圆的关系, 而“内”是三角形与圆的相对位置, 因此我们可以说这个三角形叫做圆的外切三角形. 三角形有唯一的内切圆, 而圆有无数个外切三角形.

24.3 正多边形和圆

知识点一 正多边形的有关概念

1. 中心的定义: 正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.
2. 半径的定义: 外接圆的半径叫做正多边形的半径.
3. 中心角的定义: 正多边形每条边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.
4. 边心距的定义: 中心到正多边形一边的距离叫做正多边形的边心距.

知识点二 与正多边形有关的计算

1. 正 n 边形的中心角 $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$

2. 正 n 边形的每个内角为 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, 正 n 边形的每个外角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

正多边形的中心角与外角的大小相等.

3. 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形, 设正多边形的面积为 S , 周长为 l , 边心距为 r , 则 $S = \frac{1}{2} l r$.

知识点三 正 n 边形的画法

一般通过等分圆周的方法=用量角器等分圆周或用尺规等分圆周.

(1) 用量角器等分圆周有两种方法=一是通过依次作相等的圆心角来等分圆周;二是先用量角器画一个 $\frac{360^\circ}{n}$ 的圆心角, 然后在圆上依次截取与这个圆心角所对弧相等的弧, 得到 n 个等分点.

(2) 用尺规等分圆周=对于正四边形及其 2^n (n 为正整数)倍边形(如正八边形、正十六边形...)、正六边形及其 2^n (n 为正整数)倍边形(如正十二边形、正二十四边形...)和正三角形等特殊图形可以通过用直尺和圆规等分圆周画出.

24.4 弧长和扇形面积

第一课时 弧长和扇形面积

知识点一 弧长公式

在半径为 R 的圆中, n° 的圆心角所对的弧长的计算公式为 $l = \frac{n\pi R}{180}$

温馨提示:

(1) 这里的 n , 180 在弧长计算公式中表示倍数关系, 没有单位;

(2) 在弧长公式中, 已知 l , n , R 中的任意两个量, 都可以求出第三个

量 $n = \frac{180l}{\pi R}$, $R = \frac{180l}{n\pi}$

(3)题目中若没有写明精确度,可用“ π ”表示弧长,如弧长为 2π , 35π 等;

(4)也可以用 \widehat{AB} 来表示AB的长;

(5)正确区分弧、弧的度数相等、弧长相等.度数相等的弧,弧长不一定相等,弧长相等的弧也不一定是等弧.要特别注意,只有在同圆或等圆中,才可能是等弧,才有这三者的统一.

注意:确定圆心角和半径的值,代入弧长公式计算即可.

知识点二 扇形的面积

在半径为 R 的圆中, n° 的圆心角对应的扇形面积 $S = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}lR$

温馨提示:

(1)扇形的面积公式 $S = \frac{1}{2}lR$ 与三角形的面积公式有些类似,只需把扇形看成一个曲边三角形,把弧长 l 看成底,半径 R 看成高即可;

(2)在求扇形面积时,可根据已知条件来确定是使用公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 还是使用公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$;

(3)已知 $S_{\text{扇形}}$, l , R , n 四个量中任意两个,都可以求出另外两个;

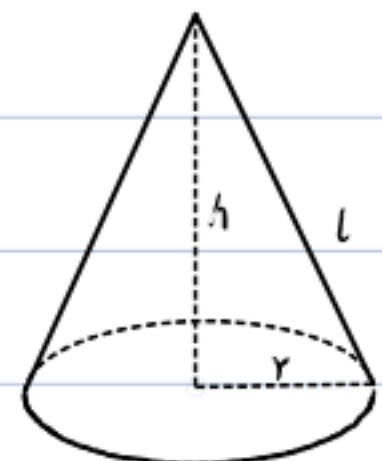
(4)扇形面积公式中的“ n ”与弧长公式中的“ n ”的意义是一样的,表示“ 1° ”的圆心角的倍数,参与计算时不带单位.

第二课时 圆锥的侧面积和全面积

知识点 圆锥的侧面积和全面积

1.圆锥的构成:圆锥是由一个底面和一个侧面围成的几何体(如图所示).

2.圆锥的母线:连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫做圆锥的母线.



3. 圆锥的高: 连接圆锥顶点与底面圆心的线段叫做圆锥的高.

4. 圆锥的基本特征:

(1) 圆锥的轴通过底面的圆心, 并垂直于底面;

(2) 圆锥的母线长都相等;

(3) 圆锥可以看成是由一个直角三角形绕一条直角边所在的直线旋转而成的图形, 故圆锥的母线 l 、圆锥的高 h 、圆锥底面圆的半径 r 恰好构成一个直角三角形(如图所示), 满足 $r^2 + h^2 = l^2$, 利用这一关系, 可以已知任意两个量求出第三个量.

温馨提示:

设圆锥的侧面展开扇形的圆心角为 a° , 则由该扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长得 $\frac{a \cdot \pi l}{180} = 2\pi r \therefore a = \frac{r}{l} \cdot 360$. 在这公式中, 已知 r, l, a 中任意两个量, 都可求出第三个量.

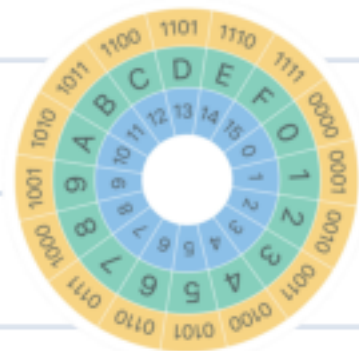
5. 圆锥的侧面积就是弧长为圆锥的底面圆的周长、半径为圆锥的母线长的扇形的面积; 圆锥的全面积就是它的侧面积和底面积的和. 即若圆锥的底面圆的半径为 r , 母线长为 l , 则圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = 1/2 \cdot 2\pi r \cdot l = \pi rl$, 全面积 $S_{\text{全}} = \pi rl + \pi r^2$.

人教九年级数学上知识清单

第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率

25.1.1 随机事件



知识梳理

知识点一 随机事件、必然事件、不可能事件

在一定条件下，有些事件必然会发生，这样的事件称为**必然事件**；相反地，有些事件必然不会发生，这样的事件称为**不可能事件**，必然事件与不可能事件统称**确定性事件**。在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**。

温馨提示：

必然事件与不可能事件统称确定性事件，在叙述必然事件、不可能事件和随机事件时，为什么反复提到“在一定条件下”？这是因为必然事件、不可能事件和随机事件都必须受到一定条件的制约。如：标准大气压下，水加热到 100°C 沸腾是必然事件，但气压高于标准大气压时，水加热到 100°C 沸腾就不是必然事件了。

例1：一个袋中只装有3个红球，从中随机摸出一个红球（ ）

- A. 可能性为3 B. 属于不可能事件
C. 属于随机事件 D. 属于必然事件

解析：因为袋中只装有3个红球，所以从中随机摸出一个一定是红球，所以属于必然事件。

知识点二 随机事件发生的可能性大小

随机事件发生的可能性有大有小，不同的随机事件发生的可能性会有所不同。随机事件发生的可能性的的大小是由它在整体问题中所占比例的

大小确定的，在整体中所占比例越大，随机事件发生的可能性越大，反之越小。

温馨提示：

(1) 随机事件发生的可能性有大小之分，可以分为：

① 可能性极小；② 不太可能；③ 可能；④ 很可能；⑤ 可能性极大。

(2) 必然事件是指一定能发生的事件，其发生的可能性是100%。不可能事件是指一定不发生的事件，其发生的可能性是0。随机事件发生的可能性在0~100%（不包括0和100%）。

注意：可能性大小的比较：只要总情况数目相同，谁包含的情况数目多，谁的可能性就大；反之可能性就小。若包含的情况数目相等，那么它们的可能性就相等。

易错点：概念理解不透，事件判断不准

对必然事件、不可能事件和随机事件的理解关键要抓住“在一定条件下，事件是一定发生，一定不发生，还是可能发生，可能不发生”，即对事件发生的可能性要仔细判断。

25.1.2 概率

知识点一 概率的意义

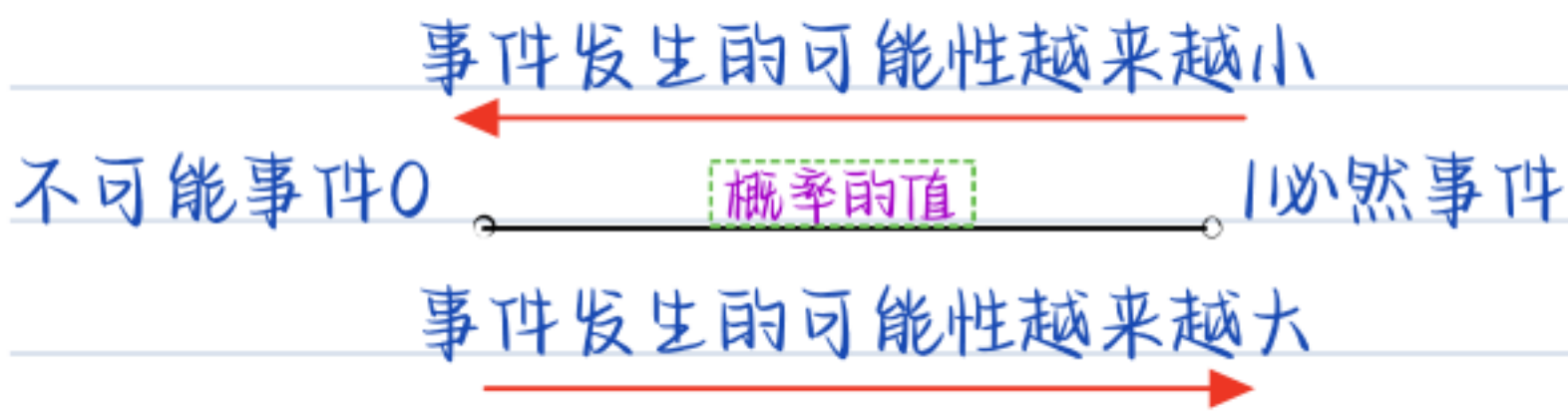
1. 一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ ， $P(A)$ 的取值范围： $0 \leq P(A) \leq 1$ ，当 A 为必然事件时， $P(A) = 1$ ；当 A 为不可能事件时， $P(A) = 0$ 。

温馨提示：试验需有以下两个共同点：

(1) 每一次试验中，可能出现的结果只有有限个；

(2) 每一次试验中，各种结果出现的可能性相等。

2. 事件发生的可能性越大，它的概率越接近1；反之，事件发生的可能性越小，它的概率越接近0。（如图所示）



知识点二 求简单事件的概率及其应用

1. 计算简单事件概率的主要类型：

- ① **个数类型**：如摸球、掷骰子等可以表示结果可能出现的种类。
- ② **面积类型**：如果随机试验是同S区域内掷一点P，那么掷在区域A(A在S内)内的概率 $P = \frac{A \text{的面积}}{S \text{的面积}}$

2. 应用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 求概率时，应先分析事件的所有等可能的结果数及所关注的结果数，要做到不重不漏。

注意：

- (1) 概率从数量上刻画了一个随机事件发生的可能性的的大小。
- (2) 概率大，并不能说明事件一定发生，只是发生的可能性大；反之，概率小，并不能说明事件不发生，只是发生的可能性小。

易错点 错误地理解概率的含义

概率是对大量重复试验而言的，大量重复试验反映出来的规律并非在每一次试验中一定存在。初学概率的同学容易把概率反映出来的规律应用到某一次试验中，从而得出错误的认识，所以必须正确地理解概率的含义才能正确解题。

25.2 用列举法求概率

第一课时 用直接列举或列表法求概率

知识点一 直接列举法求概率

在一次试验中，如果可能出现的结果只有有限个，且各种结果出现的可能性大小相等，我们可以通过一一列举的方式将试验的所有等可能结果罗列出来，再看所研究的事件包含多少种结果，进而用概率公式求出所研究事件的概率。

知识点二 列表法求概率

当一次试验要涉及两个因素并且可能出现的结果数目较多时，通常采用列表法。运用列表法求概率的步骤如下：

(1) 列表；

(2) 通过表格计数，确定公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 中 m 和 n 的值；

(3) 利用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 计算事件的概率。

第二课时 画树状图法求概率

知识点 画树状图法求概率

当一次试验要涉及3个或更多的因素时，通常利用画树状图的方法求概率，运用画树状图的方法求概率的步骤如下：

(1) 画树状图；

(2) 列出结果，确定公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 中 m 和 n 的值

(3) 利用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 计算事件概率。

25.3 用频率估计概率

知识点一 利用频率估计概率

一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率会稳定在某个常数 p 附近，那么这个常数 p 就叫做事件 A 发生的概率， $P(A) = p$.

知识点二 频率和概率的关系

用频率估计概率的适用对象：当试验的可能结果不是有限个，或各种结果发生的可能性不相等时，可通过统计频率估计概率.

温馨提示：

(1) 试验得出的频率只是概率的近似值.

(2) 对一个随机事件 A ，用频率估计的概率 $P(A)$ 不可能小于 0，也不可能大于 1.

(3) 概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并非在每一次试验中都发生.

易错点 不能正确理解概率与频率的关系

概率是指在大量重复试验中事件发生的频率的一个近似值，而不是每次试验中事件发生的频率.

温馨提示

免费资料均来自网络，仅限用于学习和研究目的。
搜集整理的资料不像研发的书籍会三审三校，难免有遗漏，如果想给孩子全面提升，建议选购知名出版社，饱受老师家长好评的书籍。
如需更多优质资源，欢迎扫码关注公众号：



扫码关注，免费领取更多素材

VV99.net

免费文档下载