

人教版数学九年级上册

第二十一章 二次根式.....1

21.1 二次根式.....1

21.2 二次根式的乘除.....2

21.3 二次根式的加减.....3

第二十二章 一元二次方程.....5

22.1 一元二次方程.....5

22.2 降次——解一元二次方程.....5

22.3 实际问题与一元二次方程.....6

第二十三章 旋转.....6

23.1 图形的旋转.....6

23.2 中心对称.....7

23.3 课题学习 图案设计.....7

第二十四章 圆.....8

24.1 圆.....8

24.2 点、直线、圆和圆的位置关系.....9

24.3 正多边形和圆.....10

24.4 弧长和扇形面积.....14

第二十五章 概率初步.....17

25.1 随机事件与概率.....17

25.2 用列举法求概率.....21

25.3 用频率估计概率.....22

第二十一章 二次根式

21.1 二次根式

1. 二次根式：式子 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 叫做二次根式。
2. 最简二次根式：满足下列两个条件的二次根式，叫做最简二次根式；
- (1) 被开方数的因数是整数，因式是整式；
- (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式。如 $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式，因被开方数中含有 4 是可开得尽方的因数，又如 $\sqrt{\frac{a}{3}}$ ， $\sqrt{a^2b}$ ， $\sqrt{2(x+y)^3}$ 都不是最简二次根式，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sqrt{2x}$ ， $5\sqrt{ab}$ ， $\frac{\sqrt{a}}{4}$ 都是最简二次根式。
3. 同类二次根式：几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次

根式就叫做同类二次根式。如 $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ 就是同类二次根式, 因为 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, 它们与 $\sqrt{2}$ 的被开方数均为 2。

4. 有理化因式: 两个含有二次根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有二次根式, 则说这两个代数式互为有理化因式。如 \sqrt{a} 与 \sqrt{a} , $a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, 互为有理化因式。

二次根式的性质:

1. \sqrt{a} ($a \geq 0$) 是一个非负数, 即 $\sqrt{a} \geq 0$;
2. 非负数的算术平方根再平方仍得这个数, 即: $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$);
3. 某数的平方的算术平方根等于某数的绝对值, 即 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$
4. 非负数的积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积, 即 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)。
5. 非负数的商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根, 即 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$)。

21.2 二次根式的乘除

1. 二次根式的乘法

两个二次根式相乘, 把被开方数相乘, 根指数不变, 即 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)。

说明: (1) 法则中 a 、 b 可以是单项式, 也可以是多项式, 要注意它们的取值范围, a 、 b 都是非负数;

(2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 可以推广为 $m\sqrt{a} \cdot n\sqrt{b} = mn\sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$); $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d} = \sqrt{abcd}$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$)。

(3) 等式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 也可以倒过来使用, 即 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)。也称“积的算术平方根”。它与二次根式的乘法结合, 可以对一些二次根式进行化简。

2. 二次根式的除法

两个二次根式相除, 把被开方数相除, 根指数不变, 即 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$)。

说明: (1) 法则中 a 、 b 可以是单项式, 也可以是多项式, 要注意它们的取值范围, $a \geq 0$, b 在分母中, 因此 $b > 0$;

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$) 可以推广为 $\frac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}} = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0, n \neq 0$);

(3) 等式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$) 也可以倒过来使用, 即 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$)。也称“商的算术平方根”。它与二次根式的除法结合, 可以对一些二次根式进行化简。

3. 最简二次根式

一个二次根式如果满足下列两个条件:

- (1) 被开方数中不含能开方开得尽的因数或因式;
- (2) 被开方数中不含分母。

这样的二次根式叫做最简二次根式。

说明:

- (1) 这两个条件必须同时满足, 才是最简二次根式;
- (2) 被开方数若是多项式, 需利用因式分解法把它们化成乘积式, 再进行化简;
- (3) 二次根式化简到最后, 二次根式不能出现在分母中, 即分母中要不含二次根式。

21.3 二次根式的加减

1. 同类二次根式

(1) 定义: 几个二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫同类二次根式。

注: 判断几个二次根式是否为同类二次根式, 关键是先把二次根式准确地化成最简二次根式, 再观察它们的被开方数是否相同。

(2) 合并同类二次根式：合并同类二次根式的方法与合并同类项的方法类似，系数相加减，二次根号及被开方数不变。

2. 二次根式的加减

(1) 二次根式的加减，先把各个二次根式化成最简二次根式，再将同类二次根式分别合并。

(2) 二次根式的加减法与多项式的加减法类似，首先是化简，在化简的基础上去括号再合并同类二次根式，同类二次根式相当于同类项。

一般地，二次根式的加减法可分以下三个步骤进行：

- i) 将每一个二次根式都化简成最简二次根式
- ii) 判断哪些二次根式是同类二次根式，把同类二次根式结合成一组
- iii) 合并同类二次根式

3. 二次根式的混合运算

二次根式的混合运算可以说是二次根式乘法、除法、加、减法则的综合应用，在进行二次根式的混合运算时应注意以下几点：

(1) 观察式子的结构，选择合适的运算顺序，二次根式的混合运算与实数的运算顺序一样，先乘方，后乘除，最后加减，有括号先算括号内的。

(2) 在运算过程中，每个根式可以看作是一个“单项式”，多个不同类的二次根式的和可以看作是“多项式”。

(3) 观察式中二次根式的特点，合理使用运算律和运算性质，在实数和整式中的运算律和运算性质，在二次根式的运算中都可以应用。

4. 分母有理化

(1) 我们在前面的学习中研究了分母形如 $a\sqrt{b}$ 形式的分式的分母有理化

综合起来，常见的有理化因式有：① \sqrt{a} 的有理化因式为 \sqrt{a} ，② $a\sqrt{b}$ 的有理化因式为 \sqrt{b} ，③ $a \pm \sqrt{b}$ 的有理化因式为 $a \mp \sqrt{b}$ ，④ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 的有理化因式为 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ，⑤ $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$ 的有理化因式为 $a\sqrt{x} \mp b\sqrt{y}$

(2) 分母有理化就是通过分子和分母同乘以分母的有理化因式，将分母中的根号去掉的过程，混合运算中进行二次根式的除法运算，一般都是通过分母有理化而进行的。

第二十二章 一元二次方程

22.1 一元二次方程

在一个等式中，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 次的整式方程叫做一元二次方程。

一元二次方程有四个特点：(1) 只含有一个未知数；(2) 且未知数次数最高次数是 2；(3) 是整式方程。要判断一个方程是否为一元二次方程，先看它是否为整式方程，若是，再对它进行整理。如果能整理为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的形式，则这个方程就为一元二次方程。(4) 将方程化为一般形式： $ax^2+bx+c=0$ 时，应满足 ($a \neq 0$)

22.2 降次——解一元二次方程

解一元二次方程的基本思想方法是通过“降次”将它化为两个一元一次方程。一元二次方程有四种解法：

1、直接开平方法：

用直接开平方法解形如 $(x-m)^2=n$ ($n \geq 0$) 的方程，其解为 $x=\pm m$ 。

直接开平方法就是平方的逆运算，通常用根号表示其运算结果。

2、配方法

通过配成完全平方式的方法，得到一元二次方程的根的方法。这种解一元二次方程的方法称为配方法，配方的依据是完全平方公式。

1. 转化： 将此一元二次方程化为 $ax^2+bx+c=0$ 的形式 (即一元二次方程的一般形式)

2. 系数化 1： 将二次项系数化为 1

3. 移项： 将常数项移到等号右侧

4. 配方： 等号左右两边同时加上一次项系数一半的平方

5. 变形： 将等号左边的代数式写成完全平方形式

6. 开方： 左右同时开平方

7. 求解： 整理即可得到原方程的根

3、公式法

公式法：把一元二次方程化成一般形式，然后计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，把各项系数 a, b, c 的值代入求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 就可得到方程的根。

因式分解法：把方程变形为一边是零，把另一边的二次三项式分解成两个一次因式的积的形式，让两个一次因式分别等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程所得到的根，就是原方程的两个根。这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法。

22.3 实际问题与一元二次方程

列一元二次方程解应用题是列一元一次方程解应用题的继续和发展

从列方程解应用题的方法来讲，列出一元二次方程解应用题与列出一元一次方程解应用题是非常相似的，由于一元一次方程未知数是一次，因此这类问题大部分都可通过算术方法来解决。如果未知数出现二次，用算术方法就很困难了，正由于未知数是二次的，所以可以用一元二次方程解决有关面积问题，经过两次增长的平均增长率问题，数学问题中涉及积的一些问题，经营决策问题等等。

第二十三章 旋转

23.1 图形的旋转

1. 图形的旋转

(1) 定义：在平面内，将一个图形绕一个定点沿某个方向（顺时针或逆时针）转动一个角度，这样的图形运动叫做旋转，这个定点叫做旋转中心，转动的角称为旋转角。

(2) 生活中的旋转现象大致有两大类：一类是物体的旋转运动，如时钟的时针、分针、秒针的转动，风车的转动等；另一类则是由某一基本图形通过旋转而形成的图案，如香港特别行政区区旗上的紫荆花图案。

(3) 图形的旋转不改变图形的大小和形状，旋转是由旋转中心和旋转角所决定，旋

转中心可以在图形上也可以在图形外。

(4) 会找对应点，对应线段和对应角。

2. 旋转的基本特征：

(1) 图形在旋转时，图形中的每一个点都绕旋转中心旋转了同样大小的角度。

(2) 图形在旋转时，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等；

(3) 图形在旋转时，图形的大小和形状都没有发生改变。

3. 几点说明：

(1) 在理解旋转特征时，首先要对照图形，找出旋转中心、旋转方向、对应点、旋转角。

(2) 旋转的角度是对应线段的夹角或对应顶点与旋转中心连线的夹角。

(3) 旋转中心的确定分两种情况，即在图形上或在图形外，若在图形上，哪一点旋转过程中位置没有改变，哪一点就是旋转中心；若在图形外，对应点连线的垂直平分线的交点就是旋转中心。

23.2 中心对称

中心对称：把一个图形绕着某一点旋转 180° ，假如它能够与另一个图形重合，那么这刘遇图形关于这个点对称或中心对称。

中心对称的性质：①关于中心对称的刘遇图形，对应点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分。②关于中心对称的刘遇图形是全等形。

中心对称图形：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形。

对称点的坐标规律：①关于 x 轴对称：横坐标不变，纵坐标互为相反数，②关于 y 轴对称：横坐标互为相反数，纵坐标不变，③关于原点对称：横坐标、纵坐标都互为相反数。

23.3 课题学习 图案设计

灵活运用平移、旋转、轴对称等变换进行图案设计。

图案设计就是通过图形变换(平移、旋转、轴对称或几种的组合)把基本图形组成具有一定意义的新图形,图案设计时不仅要正确使用了图形变换,还要看图案是否很好的体现了设计意图.

第二十四章 圆

24.1 圆

定义:(1)平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做圆。

(2)平面上一条线段,绕它的一端旋转 360° ,留下的轨迹叫圆。

圆心:(1)如定义(1)中,该定点为圆心

(2)如定义(2)中,绕的那一端的端点为圆心。

(3)圆任意两条对称轴的交点为圆心。

(4)垂直于圆内任意一条弦且两个端点在圆上的线段的二分点为圆心。

注:圆心一般用字母 O 表示

直径:通过圆心,并且两端都在圆上的线段叫做圆的直径。直径一般用字母 d 表示。

半径:连接圆心和圆上任意一点的线段,叫做圆的半径。半径一般用字母 r 表示。

圆的直径和半径都有无数条。圆是轴对称图形,每条直径所在的直线是圆的对称轴。在同圆或等圆中:直径是半径的 2 倍,半径是直径的二分之一. $d=2r$ 或 $r=\frac{1}{2}d$ 。

圆的半径或直径决定圆的大小,圆心决定圆的位置。

圆的周长:围成圆的曲线的长度叫做圆的周长,用字母 C 表示。

圆的周长与直径的比值叫做圆周率。

圆的周长除以直径的商是一个固定的数,把它叫做圆周率,它是一个无限不循环小数(无理数),用字母 π 表示。计算时,通常取它的近似值, $\pi \approx 3.14$ 。

直径所对的圆周角是直角。 90° 的圆周角所对的弦是直径。

圆的面积公式:圆所占平面的大小叫做圆的面积。 πr^2 ,用字母 S 表示。

一条弧所对的圆周角是圆心角的二分之一。

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弧相等，所对的弦心距也相等。

周长计算公式

1.、已知直径： $C = \pi d$

2、已知半径： $C = 2 \pi r$

3、已知周长： $D = c \div \pi$

4、圆周长的一半： $\frac{1}{2}$ 周长(曲线)

5、半圆的长： $\frac{1}{2}$ 周长+直径

面积计算公式：

1、已知半径： $S = \pi r^2$ 平方

2、已知直径： $S = \pi (d \div 2)^2$ 平方

3、已知周长： $S = \pi (c \div 2 \pi)^2$ 平方

24.2 点、直线、圆和圆的位置关系

1. 点和圆的位置关系

① 点在圆内 \Leftrightarrow 点到圆心的距离小于半径

② 点在圆上 \Leftrightarrow 点到圆心的距离等于半径

③ 点在圆外 \Leftrightarrow 点到圆心的距离大于半径

2. 过三点的圆

不在同一直线上的三个点确定一个圆。

3. 外接圆和外心

经过三角形的三个顶点可以做一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆。

外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心。

4. 直线和圆的位置关系

相交：直线和圆有两个公共点叫这条直线和圆相交，这条直线叫做圆的割线。

相切：直线和圆有一个公共点叫这条直线和圆相切，这条直线叫做圆的切线，这个点叫做切点。

相离：直线和圆没有公共点叫这条直线和圆相离。

5. 直线和圆位置关系的性质和判定

如果 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，那么

① 直线 l 和 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$ ；

② 直线 l 和 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$ ；

③ 直线 l 和 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$ 。

圆和圆

定义：

两个圆没有公共点且每个圆的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆的外离。

两个圆有唯一的公共点且除了这个公共点外，每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做两个圆的外切。

两个圆有两个交点，叫做两个圆的相交。

两个圆有唯一的公共点且除了这个公共点外，每个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做两个圆的内切。

两个圆没有公共点且每个圆的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆的内含。

原理：

圆心距和半径的数量关系：

两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$

两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$

两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r (R > r)$

两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r (R > r)$

两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r (R > r)$

24.3 正多边形和圆

1、正多边形的概念：各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形。

2、正多边形与圆的关系：

(1) 将一个圆 $n (n \geq 3)$ 等分(可以借助量角器)，依次连结各等分点所得的多边形是这个

圆的内接正多边形。

(2) 这个圆是这个正多边形的外接圆。

3、正多边形的有关概念：

(1) 正多边形的中心——正多边形的外接圆的圆心。

(2) 正多边形的半径——正多边形的外接圆的半径。

(3) 正多边形的边心距——正多边形中心到正多边形各边的距离。

(4) 正多边形的中心角——正多边形每一边所对的外接圆的圆心角。

4、正多边形性质：

(1) 任何正多边形都有一个外接圆。

(2) 正多边形都是轴对称图形，当边数是偶数时，它又是中心对称图形，正 n 边形的对称轴有 n 条。

(3) 边数相同的正多边形相似。

重点：正多边形的有关计算。

知识讲解

1、正多边形定义：各边相等，各角也相等的多边形叫正多边形。

例如：正三角形、正四边形(正方形)、正六边形等等。如果一个正多边形有 n 条边，那么，这个多边形叫正 n 边形。

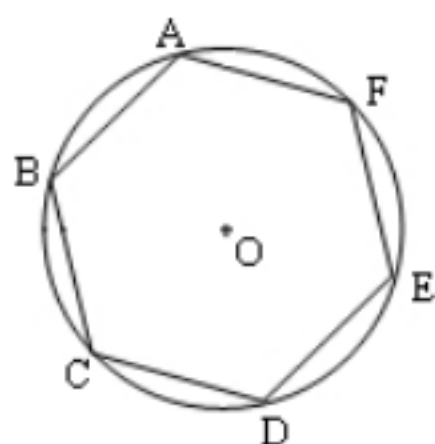
再如：矩形不是正多边形，因为它只具有各角相等，而各边不一定相等；菱形不是正多边形，因为它只具有各边相等，而各角不一定相等。

2、正多边形与圆的关系。

正多边形与圆有密切关系，把圆分成 n ($n \geq 3$) 等份，依次连结分点所得的多边形是这个圆的内接正 n 边形。

相邻分点间的弧相等，则所对的弦(正多边形的边)相等，相邻两弦所夹的角(多边形的每个内角)都相等，从而得出，所连的多边形满足了所有边都相等，所有内角都相等，从而这个多边形就是正多边形。

如：将圆 6 等分，即 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$ ，则 $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ 。



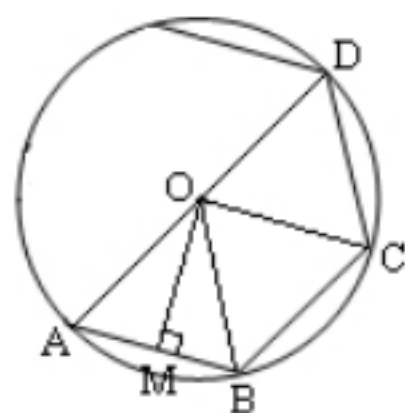
观察 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 所对的弧可以发现都是相等的弧，所以， $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$ 。

所以，将一个圆 6 等分，依次连结各分点所得到的是 $\odot O$ 的内接正六边形。

3、正多边形的有关计算。

(1) 首先要明确与正多边形计算的有关概念：即正多边形的中心 O ，正多边形的半径 R_n ——就是其外接圆的半径，正多边形的边心距 r_n ，正多边形的中心角 α_n ，正多边形的边长 a_n 。

(2) 正 n 边形的 n 条半径把正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形，等腰三角形的顶角就是正 n 边形的中心角都等于 $\frac{360^\circ}{n}$ ；如果再作出正 n 边形各边的边心距，这些边心距又把这 n 个等腰三角形分成了 $2n$ 个全等的直角三角形。



如图：是一个正 n 边形 $ABCD \dots$ 根据以上讲解，我们来分析 $Rt \triangle AOM$ 的基本元素：

斜边 OA ——正 n 边形的半径 R_n ；

一条直角边 OM ——正 n 边形的边心距 r_n ；

一条直角边 AM ——正 n 边形的边长 a_n 的一半即 $AM = \frac{1}{2} a_n$ ；

锐角 $\angle AOM$ ——正 n 边形的中心角 α_n 的一半即 $\angle AOM = \frac{1}{2} \alpha_n = \frac{180^\circ}{n}$ ；

锐角 $\angle OAM$ ——正 n 边形内角的一半即 $\angle OAM = \frac{1}{2n} [(n-2) \cdot 180^\circ]$ ；

可以看到在这个直角三角形中的各元素恰好反映了正 n 边形的各元素。

因此，就可以把正 n 边形的有关计算归纳为解直角三角形的问题。

4、正多边形的有关作图。

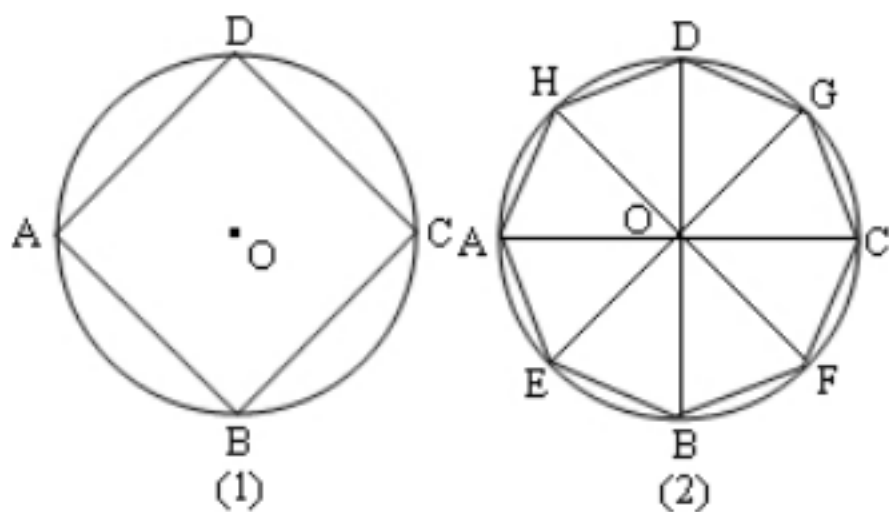
(1) 使用量角器来等分圆。

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角(即等分顶点在圆心的周角)可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形。

(2) 用尺规来等分圆。

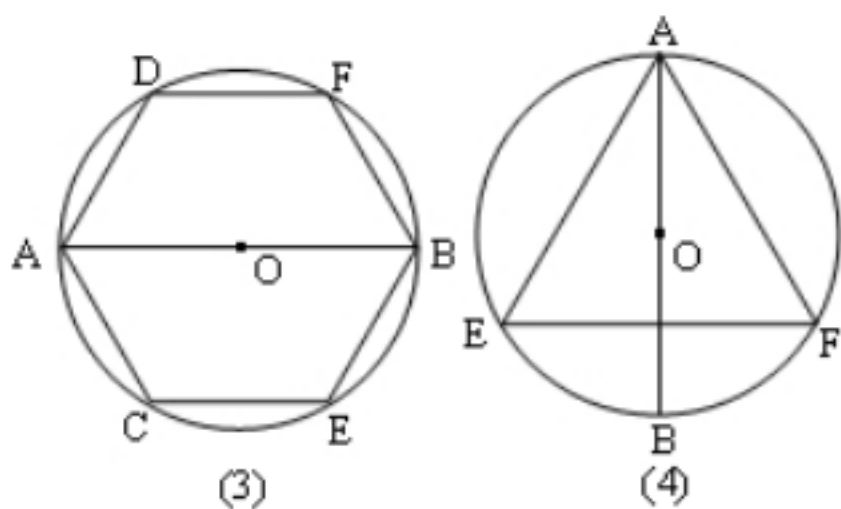
对于一些特殊的正 n 边形，还可以用圆规和直尺作出图形。

① 正四、八边形。



在 $\odot O$ 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形。再逐次平分各边所对的弧(即作 $\angle AOB$ 的平分线交 \widehat{AB} 于 E) 就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形。

② 正六、三、十二边形的作法。



通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在 $\odot O$ 中，任画一条直径 AB ，分别以 A 、 B 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧与 $\odot O$ 相交于 C 、 D 和 E 、 F ，则 A 、 C 、 E 、 B 、 F 、 D 是 $\odot O$ 的 6 等分点。

显然， A 、 E 、 F (或 C 、 B 、 D) 是 $\odot O$ 的 3 等分点。

同样，在图(3)中平分每条边所对的弧，就可把 $\odot O$ 12 等分……。

5、正多边形的对称性。

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心，如果正多边形有偶数条边，那么，它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心。

如：正三角形、正方形。

24.4 弧长和扇形面积

知识点 1、弧长公式

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$ ，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$ ，即 $\frac{\pi R}{180}$ ，于是可得半径为 R 的圆中， n° 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$ ，

说明：（1）在弧长公式中， n 表示 1° 的圆心角的倍数， n 和 180 都不带单位“度”，

例如，圆的半径 $R=10$ ，计算 20° 的圆心角所对的弧长 l 时，不要错写成 $l = \frac{1}{180} \times 20^\circ \times 10\pi$ 。

（2）在弧长公式中，已知 l ， n ， R 中的任意两个量，都可以求出第三个量。

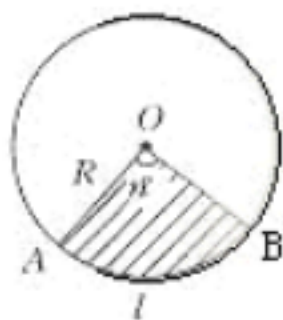
知识点 2、扇形的面积

如图所示，阴影部分的面积就是半径为 R ，圆心角为 n° 的扇形面积，显然扇形的面积是它所在圆的面积的一部分，因为圆心角是 360° 的扇形面积等于圆面积 πR^2 ，所以圆心角

为 1° 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$ ，由此得圆心角为 n° 的扇形面积的计算公式是 $S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi R^2$ 。

又因为扇形的弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$ ，扇形面积 $\frac{n\pi R^2}{360}$ 可以写成 $\frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi R}{180} \cdot R$ ，所以又得到扇形面积

的另一个计算公式： $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} lR$ 。



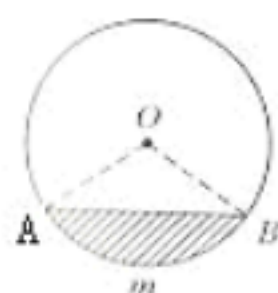
知识点 3、弓形的面积

(1) 弓形的定义：由弦及其所对的弧（包括劣弧、优弧、半圆）组成的图形叫做弓形。

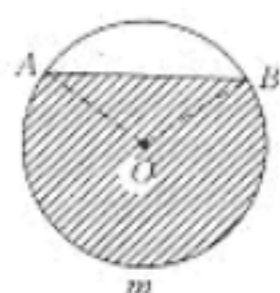
(2) 弓形的周长=弦长+弧长

(3) 弓形的面积

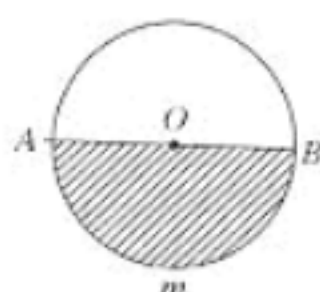
如图所示，每个圆中的阴影部分的面积都是一个弓形的面积，从图中可以看出，只要把扇形 $OAmB$ 的面积和 $\triangle AOB$ 的面积计算出来，就可以得到弓形 AmB 的面积。



(1)



(2)



(3)

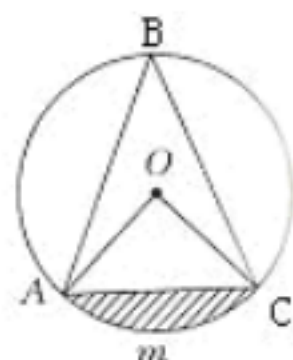
当弓形所含的弧是劣弧时，如图 1 所示， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形} OAmB} - S_{\triangle AOB}$

当弓形所含的弧是优弧时，如图 2 所示， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形} OAmB} + S_{\triangle AOB}$

当弓形所含的弧是半圆时，如图 3 所示， $S_{\text{弓形}} = \frac{1}{2} S_{\text{半圆}}$

例：如图所示， $\odot O$ 的半径为 2， $\angle ABC = 45^\circ$ ，则图中阴影部分的面积是

() (结果用 π 表示)



分析：由图可知 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OAmC} - S_{\triangle OAC}$ ，由圆周角定理可知 $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ ，所以 $\angle AOC = 2\angle ABC = 90^\circ$ ，所以 $\triangle OAC$ 是直角三角形，所以

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, S_{\text{扇形} OAmC} = \frac{90}{360} \pi \times 2^2 = \pi,$$

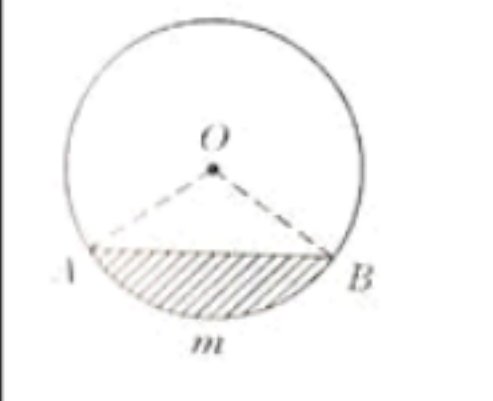
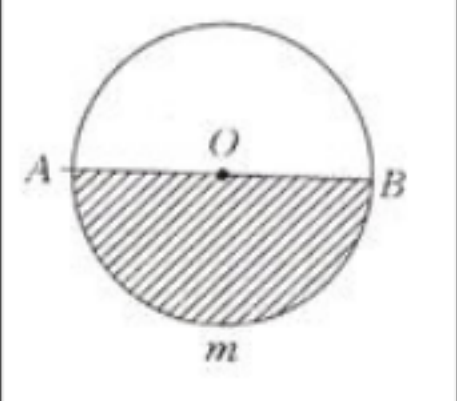
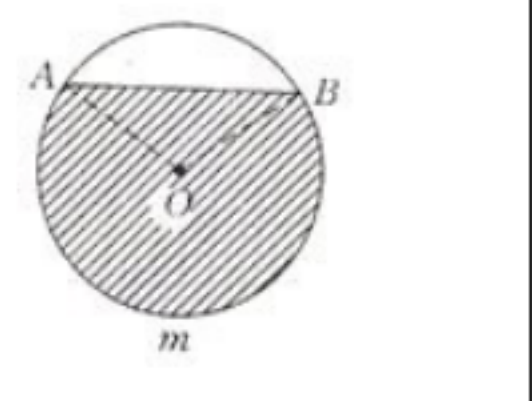
$$\text{所以 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OAmC} - S_{\triangle OAC} = \pi - 2$$

注意：(1) 圆周长、弧长、圆面积、扇形面积的计算公式。

	圆周长	弧长	圆面积	扇形面积
公 式	$C = 2\pi R$ $C = \pi d$	$S = \frac{n}{360}$	$S = \pi R^2$	$S = \frac{n}{360} \pi R^2$ $S = \frac{1}{2} lR$

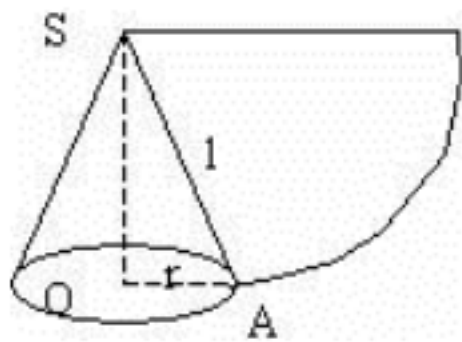
(2) 扇形与弓形的联系与区别

(2) 扇形与弓形的联系与区别

图 示			
面 积	$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\Delta}$	$S_{\text{弓形}} = \frac{1}{2} S_{\text{圆}}$	$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} + S_{\Delta}$

知识点 4、圆锥的侧面积

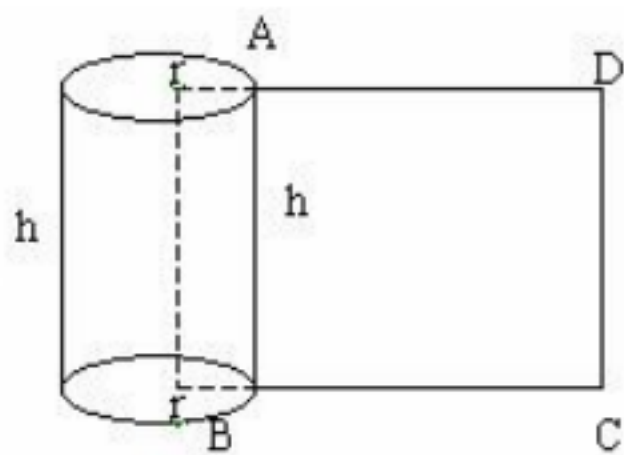
圆锥的侧面展开图是一个扇形，如图所示，设圆锥的母线长为 l ，底面圆的半径为 r ，那么这个扇形的半径为 l ，扇形的弧长为 $2\pi r$ ，圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi r = \pi r l$ ，圆锥的全面积 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$



说明：（1）圆锥的侧面积与底面积之和称为圆锥的全面积。
（2）研究有关圆锥的侧面积和全面积的计算问题，关键是理解圆锥的侧面积公式，并明确圆锥全面积与侧面积之间的关系。

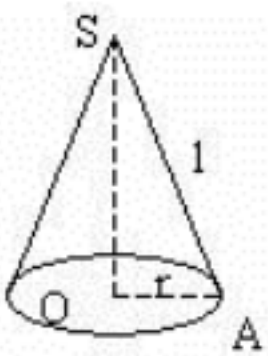
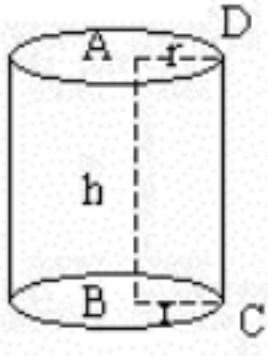
知识点 5、圆柱的侧面积

圆柱的侧面积展开图是矩形，如图所示，其两邻边分别为圆柱的高和圆柱底面圆的周长，若圆柱的底面半径为 r ，高为 h ，则圆柱的侧面积 $S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot h$ ，圆柱的全面积 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$



知识小结：
圆锥与圆柱的比较

名称	圆锥	圆柱
----	----	----

图形		
图形的形成过程	由一个直角三角形旋转得到的, 如 $Rt\triangle SOA$ 绕直线 SO 旋转一周。	由一个矩形旋转得到的, 如矩形 $ABCD$ 绕直线 AB 旋转一周。
图形的组成	一个底面和一个侧面	两个底面和一个侧面
侧面展开图的特征	扇形	矩形
面积计算方法	$S_{侧} = \pi r l$ $S_{全} = S_{侧} + S_{底} = \pi r l + \pi r^2$	$S_{侧} = 2\pi r h$ $S_{全} = S_{侧} + 2S_{底} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率

1. 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验:

- (1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 但事先知道每次试验所有可能的结果;
- (3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

试验的所有可能结果所组成的集合为样本空间, 用 Ω 表示, 其中的每一个结果用 e 表示, e 称为样本空间中的样本点, 记作 $\Omega = \{e\}$.

2. 随机事件

在随机试验中, 把一次试验中可能发生也可能不发生、而在大量重复试验中却呈现某种规律性的事情称为随机事件(简称事件). 通常把必然事件(记作 Ω)与不可能事件(记作 ϕ)看作特殊的随机事件.

3. 事件的关系及运算

- (1) 包含: 若事件 A 发生, 一定导致事件 B 发生, 那么, 称事件 B 包含事件 A , 记作

$A \subset B$ (或 $B \supset A$).

(2) 相等: 若两事件 A 与 B 相互包含, 即 $A \supset B$ 且 $B \supset A$, 那么, 称事件 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

(3) 和事件: “事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件称为 A 与 B 的和事件, 记作 $A \cup B$; “ n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一事件发生”这一事件称为

A_1, A_2, \dots, A_n 的和, 记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$).

(4) 积事件: “事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为 A 与 B 的积事件, 记作 $A \cap B$ (简记为 AB); “ n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”这一事件称为 A_1, A_2, \dots, A_n 的积

事件, 记作 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ (简记为 $A_1 A_2 \dots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$).

(5) 互不相容: 若事件 A 和 B 不能同时发生, 即 $AB = \phi$, 那么称事件 A 与 B 互不相容 (或互斥), 若 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中任意两个事件不能同时发生, 即 $A_i A_j = \phi$ ($1 \leq i < j \leq n$), 那么, 称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容.

(6) 对立事件: 若事件 A 和 B 互不相容、且它们中必有一事件发生, 即 $AB = \phi$ 且 $A \cup B = \Omega$, 那么, 称 A 与 B 是对立的. 事件 A 的对立事件 (或逆事件) 记作 \bar{A} .

(7) 差事件: 若事件 A 发生且事件 B 不发生, 那么, 称这个事件为事件 A 与 B 的差事件, 记作 $A - B$ (或 $\bar{A}B$).

(8) 交换律: 对任意两个事件 A 和 B 有

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA.$$

(9) 结合律: 对任意事件 A, B, C 有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

(10) 分配律: 对任意事件 A, B, C 有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(11) 德·摩根 (De Morgan) 法则: 对任意事件 A 和 B 有

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

4. 频率与概率的定义

(1) 频率的定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次, 则比值 n_A / n 称为随机事件 A 发生的频率, 记作 $f_n(A)$, 即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

(2) 概率的统计定义

在进行大量重复试验中, 随机事件 A 发生的频率具有稳定性, 即当试验次数 n 很大时, 频率 $f_n(A)$ 在一个稳定的值 P ($0 < P < 1$) 附近摆动, 规定事件 A 发生的频率的稳定值 P 为概率, 即 $P(A) = P$.

(3) 古典概率的定义

具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型:

- (i) 试验的样本空间 Ω 是个有限集, 不妨记作 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;
- (ii) 在每次试验中, 每个样本点 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 出现的概率相同, 即 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\})$.

在古典概型中, 规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega \text{ 中所含样本点的个数}} = \frac{n_A}{n}.$$

(4) 几何概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个区域(可以是直线上的区间、平面或空间中的区域), 且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性, 那么规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的长度 (或面积、体积)}}{\text{样本空间的长度 (或面积、体积)}}.$$

(5) 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω , 随机事件 A 是 Ω 的子集, $P(A)$ 是实值函数, 若满足下列三条公理:

公理 1 (非负性) 对于任一随机事件 A, 有 $P(A) \geq 0$;

公理 2 (规范性) 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;

公理 3 (可列可加性) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

5. 概率的性质

由概率的三条公理可导出下面概率的一些重要性质

(1) $P(\phi) = 0$.

(2) (有限可加性) 设 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

(3) 对于任意一个事件 A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(4) 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(A) \leq P(B).$$

(5) 对于任意一个事件 A , 有 $P(A) \leq 1$.

(6) (加法公式) 对于任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

对于任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$$

6. 条件概率与乘法公式

设 A 与 B 是两个事件. 在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率称为条件概率, 记作 $P(A|B)$. 当 $P(B) > 0$, 规定

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下, 条件概率具有概率的一切性质.

乘法公式: 对于任意两个事件 A 与 B , 当 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ 时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

7. 随机事件的相互独立性

如果事件 A 与 B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

那么, 称事件 A 与 B 相互独立.

关于事件 A, B 的独立性有下列两条性质:

(1) 如果 $P(A) > 0$, 那么, 事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$;

如果 $P(B) > 0$ ，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B) = P(A)$ 。

这条性质的直观意义是“事件 A 与 B 发生与否互不影响”。

(2) 下列四个命题是等价的：

(i) 事件 A 与 B 相互独立；

(ii) 事件 A 与 \bar{B} 相互独立；

(iii) 事件 \bar{A} 与 B 相互独立；

(iv) 事件 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立。

对于任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立性定义如下：对任意一个 $k = 2, \dots, n$ ，任意的 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ，若事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ 总满足

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立。这里实际上包含了 $2^n - n - 1$ 个等式。

8. 贝努里概型与二项概率

设在每次试验中，随机事件 A 发生的概率 $P(A) = p (0 < p < 1)$ ，则在 n 次重复独立试验中，事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n,$$

称这组概率为二项概率。

9. 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式：如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ ， $P(A_i) > 0$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，则

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, k = 1, 2, \dots, n.$$

25.2 用列举法求概率

1、当一次试验中，可能出现的结果是有限个，并且各种结果发生的可能性相等时，可以用被关注的结果在全部试验结果中所占的比分析出事件中该结果发生的概率，此时可采

用列举法.

2、列举法就是把要数的对象一一列举出来分析求解的方法. 但有时一一列举出的情况数目很大, 此时需要考虑如何去排除不合理的情况, 尽可能减少列举的问题可能解的数目.

3、利用列表法或树形图法求概率的关键是: ①注意各种情况出现的可能性务必相同; ②其中某一事件发生的概率 = $\frac{\text{某一事件发生的次数}}{\text{各种情况出现的次数}}$; ③在考查各种情况出现的次数和某一事件发生的次数时不能重复也不能遗漏;

4、用列表法或树形图法求得的概率是理论概率, 而实验估计值是频率, 它通常受到实验次数的影响而产生波动, 因此两者不一定一致, 实验次数较多时, 频率稳定于概率, 但并不完全等于概率。

25.3 用频率估计概率

在做大量重复试验时, 随着试验次数的增加, 一个随机事件出现的频率应该稳定于该事件发生的概率。事件发生的频率与概率既有区别又有联系: 事件发生的频率不一定相同, 是个变数, 而事件发生的概率是个常数; 但它们之间又有密切的联系, 随着试验次数的增加, 频率越来越稳定于概率。

在具体操作过程中, 大家往往发现: 虽然多次试验结果的频率逐渐稳定于概率, 但可能无论做多少次试验, 两者之间存在着一定的偏差。应该注意: 这种偏差的存在是经常的, 并且是正常的。另外, 由于受到某些因素的影响, 通过试验得到的估计结果往往不太理想, 甚至有可能出现极端情况, 此时我们应正确地看待这样的结果并尝试着对结果进行合理的解释。对试验结果的频率与理论概率的偏差的理解也是形成随机观念的一个重要环节。

在实际应用中, 当试验次数越大时, 出现极端情况的可能性就越小。因此, 我们常常通过做大量重复试验来获得事件发生的频率, 并用它作为概率的估计值。试验次数越多, 得到的估计结果就越可靠。

VV99.net

免费文档下载