

目录

I	必修第一册	7
1	集合与常用逻辑用语	9
1.1	集合的概念	9
1.2	集合间的基本关系	9
1.3	集合的基本运算	10
	阅读与思考 集合中元素的个数	11
1.4	充分条件与必要条件	11
1.4.1	充分条件与必要条件	11
1.4.2	充要条件	12
1.5	全称量词与存在量词	12
1.5.1	全称量词与存在量词	12
1.5.2	全称量词命题和存在量词命题的否定	12
	阅读与思考 几何命题与充分条件、必要条件	13
2	一元二次函数、方程和不等式	15
2.1	等式性质与不等式性质	15
2.2	基本不等式	16
2.3	二次函数与一元二次方程、不等式	16
3	函数的概念与性质	19
3.1	函数的概念及其表示	19
3.1.1	函数的概念	19
3.1.2	函数的表示法	20
	阅读与思考 函数概念的发展历程	20
3.2	函数的基本性质	20
3.2.1	单调性与最大(小)值	20
3.2.2	奇偶性	21
	信息技术应用 用计算机绘制函数图象	21
3.3	幂函数	22
	探究与发现 探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质	23
3.4	函数的应用(一)	23
	文献阅读与数学写作	23

4	指数函数与对数函数	25
4.1	指数	25
4.1.1	n 次方根与分数指数幂	25
4.1.2	无理数指数幂及其运算性质	26
4.2	指数函数	26
4.2.1	指数函数的概念	26
4.2.2	指数函数的图象和性质	26
	阅读与思考 放射性物质的衰减	27
	信息技术应用 探究指数函数的性质	27
4.3	对数函数	27
4.3.1	对数的概念	27
4.3.2	对数的运算	28
	阅读与思考 对数的发明	28
4.3.3	对数函数的概念	28
4.3.4	对数函数的图象和性质	28
	探究与发现 互为反函数的两个函数图象间的关系	29
4.3.5	不同函数增长的差异	29
4.4	函数的应用(二)	30
4.4.1	函数的零点与方程的解	30
4.4.2	用二分法求方程的近似解	30
	阅读与思考 中外历史上的方程求解	30
4.4.3	函数模型的应用	31
	文献阅读与数学写作 对数概念的形成与发展	31
5	三角函数	33
5.1	任意角和弧度制	33
5.1.1	任意角	33
5.1.2	弧度制	33
5.2	三角函数的概念	34
5.2.1	三角函数的概念	34
5.2.2	同角三角函数的基本关系	35
	阅读与思考 三角学与天文学	36
5.3	诱导公式	36
5.4	三角函数的图象与性质	37
5.4.1	正弦函数、余弦函数的图象	37
	探究与发现 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 及函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期	38
	探究与发现 利用单位圆的性质研究正弦函数、余弦函数的性质	38
5.4.2	正弦函数、余弦函数的性质	38
5.4.3	正切函数的性质与图象	39
5.5	三角恒等变换	40
5.5.1	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	40
	信息技术应用 利用信息技术制作三角函数表	40
5.5.2	简单的三角恒等变换	41

5.6	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	41
5.6.1	匀速圆周运动的数学模型	41
5.6.2	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	41
5.7	三角函数的应用	42
	阅读与思考 振幅、周期、频率、相位	42
II	必修第二册	43
6	平面向量及其应用	45
6.1	平面向量的概念	45
6.1.1	向量的实际背景与概念	45
6.1.2	向量的几何表示	45
6.1.3	相等向量与共线向量	45
	阅读与思考 向量及向量符号的由来	46
6.2	平面向量的运算	46
6.2.1	向量的加法运算	46
6.2.2	向量的减法运算	47
6.2.3	向量的数乘运算	47
6.2.4	向量的数量积	48
6.3	平面向量基本定理及坐标表示	49
6.3.1	平面向量基本定理	49
6.3.2	平面向量的正交分解及坐标表示	50
6.3.3	平面向量加、减运算的坐标表示	50
6.3.4	平面向量数乘运算的坐标表示	51
6.3.5	平面向量数量积的坐标表示	51
6.4	平面向量的应用	52
6.4.1	平面几何中的向量方法	52
6.4.2	向量在物理中的应用举例	52
6.4.3	余弦定理、正弦定理	52
	阅读与思考 海伦与秦九韶	52
7	复数	55
7.1	复数的概念	55
7.1.1	数系的扩充和复数的概念	55
7.1.2	复数的几何意义	56
7.2	复数的四则运算	56
7.2.1	复数的加、减运算及其几何意义	56
7.2.2	复数的乘、除运算	57
	阅读与思考 代数基本定理	57
7.3*	复数的三角表示	57
7.3.1	复数的三角表示式	57
7.3.2	复数乘、除运算的三角表示及其几何意义	58
	探究与发现 1 的 n 次方根	58

Part I

必修第一册



集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念

1. 把研究对象统称为**元素** (element), 把一些元素组成的总体叫做**集合** (set)(简称为**集**).
2. 给定的集合, 它的元素必须是确定的.
3. 一个给定集合中的元素是互不相同的.
4. 只要构成两个集合的元素是一样的, 就称这两个集合是**相等**的.
5. 通常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合, 用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素.
6. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a **属于** (belong to) 集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 中的元素, 就说 a **不属于** (not belong to) 集合 A , 记作 $a \notin A$.
7. 数学中一些常用的数集及其记法
 - (1) 全体非负整数组成的集合称为非负整数集 (或自然数集), 记作 \mathbf{N} ;
 - (2) 全体正整数组成的集合称为正整数集, 记作 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ ;
 - (3) 全体整数组成的集合称为整数集, 记作 \mathbf{Z} ;
 - (4) 全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作 \mathbf{Q} ;
 - (5) 全体实数组成的集合称为实数集, 记作 \mathbf{R} .
8. 像 $\{1, 2\}$ 这样把集合的所有元素一一列举出来, 并用花括号 “ $\{ \}$ ” 括起来表示集合的方法叫做**列举法**.
9. 设 A 是一个集合, 把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为

$$\{x \in A | P(x)\},$$

这种表示集合的方法称为**描述法**.

1.2 集合间的基本关系

1. 用平面上封闭曲线的内部代表集合, 这种图称为 **Venn 图**.

2. 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素, 就称集合 A 为集合 B 的**子集** (subset), 记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A),$$

读作“ A 包含于 B ” (或“ B 包含 A ”). 用 Venn 图表示如图 1.2-1.

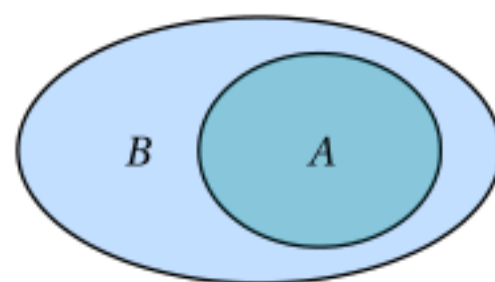


图 1.2-1

3. 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.
4. 如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 就称集合 A 是集合 B 的**真子集** (proper subset), 记作

$$A \subsetneq B \text{ (或 } B \supsetneq A).$$

5. 不含任何元素的集合叫做**空集** (empty set), 记为 \emptyset , 并规定: 空集是任何集合的子集.
6. (1) 任何一个集合是它本身的子集, 即

$$A \subseteq A;$$

- (2) 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$.

1.3 集合的基本运算

1. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的**并集** (union set), 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\},$$

用 Venn 图表示如图 1.3-1.

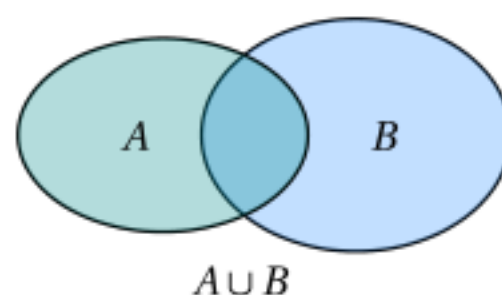


图 1.3-1

2. 并集的性质

$$(1) A \cup A = A,$$

$$(2) A \cup \emptyset = A.$$

3. 利用数轴可以直观表示求并集过程, 例如: $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B$ 如图 1.3-2.

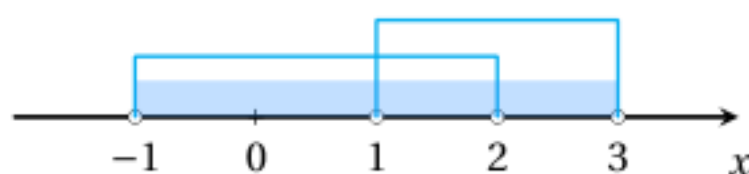


图 1.3-2

4. 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的**交集** (intersection set), 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\},$$

用 Venn 图表示如图 1.3-3.

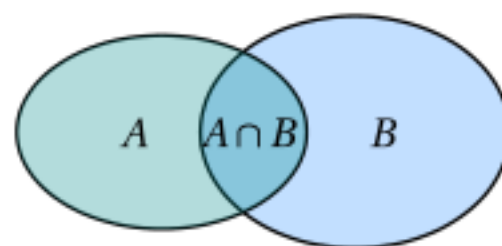


图 1.3-3

5. 交集的性质

$$(1) A \cap A = A,$$

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

6. 如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为**全集** (universe set),通常记作 U .
7. 由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的**补集** (complementary set),简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,即

$$\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且} x \notin A\},$$

用 Venn 图表示如图 1.3-4.

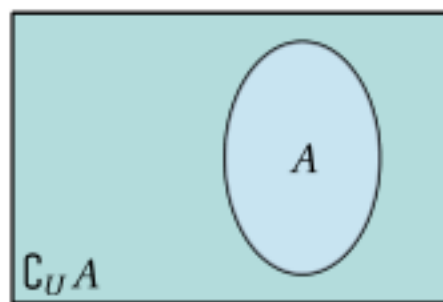


图 1.3-4

阅读与思考 集合中元素的个数

1. 含有限个元素的集合 A 叫做有限集,用 $\text{card}(A)$ 表示有限集 A 中元素的个数 (card 是英文 cardinal (基数) 的缩写).
2. 对任意两个有限集合 A, B , 有

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

1. 可以判断真假的陈述句叫做命题.判断为真的语句是真命题,判断为假的语句是假命题
2. “若 p , 则 q ” 形式的命题中, p 称为命题的条件, q 称为命题的结论
3. “若 p , 则 q ” 为真命题,是指由 p 通过推理可以得出 q ,这时就说,由 p 可以推出 q ,记作

$$p \Rightarrow q,$$

并且说, p 是 q 的**充分条件** (sufficient condition), q 是 p 的**必要条件** (necessary condition).

4. 如果“若 p , 则 q ”为假命题,那么由条件 p 不能推出结论 q ,记作 $p \nRightarrow q$.此时,说 p 不是 q 的充分条件, q 不是 p 的必要条件.
5. 对于给定结论 q ,使得 q 成立的条件 p 是不唯一的.数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.
6. 给定条件 p ,由 p 可以推出的结论 q 是不唯一的.数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

1.4.2 充要条件

1. 若果“若 p , 则 q ”和它的逆命题“若 q , 则 p ”均是真命题, 即既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就记作

$$p \Longleftrightarrow q$$

此时, p 既是 q 的充分条件, 也是 q 的必要条件, 说 p 是 q 的充分必要条件, 简称为充要条件 (sufficient and necessary condition). 显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词

1. 含有变量的陈述句, 无法判断真假, 因此不是命题. 如果用一个短语对变量取值范围进行限定, 就可以使它成为命题, 这样的短语称为量词
2. 短语“所有的”“任意一个”在逻辑中叫做全称量词 (universal quantifier), 用符号“ \forall ”表示. 含有全称量词的命题, 叫做全称量词命题 (universal proposition).
3. 含有变量 x 的语句用 $p(x), q(x), r(x), \dots$ 表示, 变量 x 的取值范围用 M 表示. 那么, 全称量词命题“对 M 中任意一个 $x, p(x)$ 成立”可用符号简记为

$$\forall x \in M, p(x).$$

4. 短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中叫做存在量词 (existential quantifier), 并用符号“ \exists ”表示. 含有存在量词的命题, 叫做存在量词命题 (existential proposition).
5. 存在量词命题“存在 M 中的元素 $x, p(x)$ 成立”可用符号简记为

$$\exists x \in M, p(x).$$

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

1. 一个命题和它的否定必然一真一假.
2. 全称量词命题:

$$\forall x \in M, p(x),$$

它的否定:

$$\exists x \in M, \neg p(x).$$

3. 存在量词命题:

$$\exists x \in M, p(x),$$

它的否定:

$$\forall x \in M, \neg p(x).$$

2

一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质

1. 基本事实:如果 $a-b$ 是正数,那么 $a>b$;如果 $a-b$ 等于 0,那么 $a=b$;如果 $a-b$ 是负数,那么 $a<b$. 反过来也对.即

$$a>b \iff a-b>0;$$

$$a=b \iff a-b=0;$$

$$a<b \iff a-b<0.$$

2. 等式的基本性质:

性质 1 如果 $a=b$,那么 $b=a$;

性质 2 如果 $a=b, b=c$,那么 $a=c$;

性质 3 如果 $a=b$,那么 $a\pm c=b\pm c$;

性质 4 如果 $a=b$,那么 $ac=bc$;

性质 5 如果 $a=b, c\neq 0$,那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

3. 不等式的性质

性质 1 如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$. 即

$$a>b \iff b<a.$$

性质 2 如果 $a>b, b>c$,那么 $a>c$. 即

$$a>b, b>c \implies a>c.$$

性质 3 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

性质 4 如果 $a>b, c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b, c<0$,那么 $ac<bc$.

性质 5 如果 $a>b, c>d$,那么 $a+c>b+d$.

性质 6 如果 $a>b>0, c>d>0$,那么 $ac>bd$.

性质 7 如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n (n\in\mathbf{N}, n\geq 2)$.

2.2 基本不等式

1. $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

2. 如果 $a > 0, b > 0$,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{2.2-1}$$

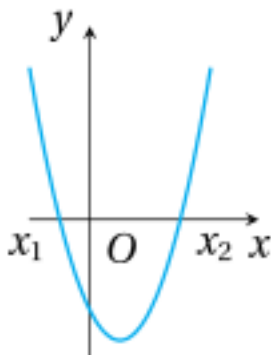
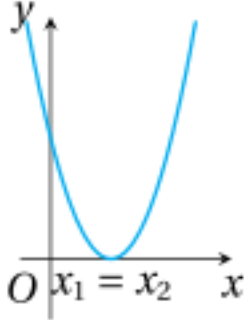
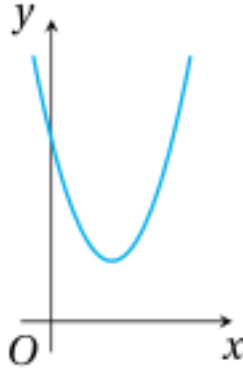
当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.(2.2-1) 称为**基本不等式** (basic inequality). 其中, $\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a, b 的算术平均数, \sqrt{ab} 叫做正数 a, b 的几何平均数. 基本不等式表明: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

1. 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的不等式, 称为**一元二次不等式** (quadratic inequality in one unknown).

2. 三个二次关系

表 2.3-1 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
$ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x < x_1, \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

3. 一元二次不等式的解法, 如图2.3-1, 图2.3-2

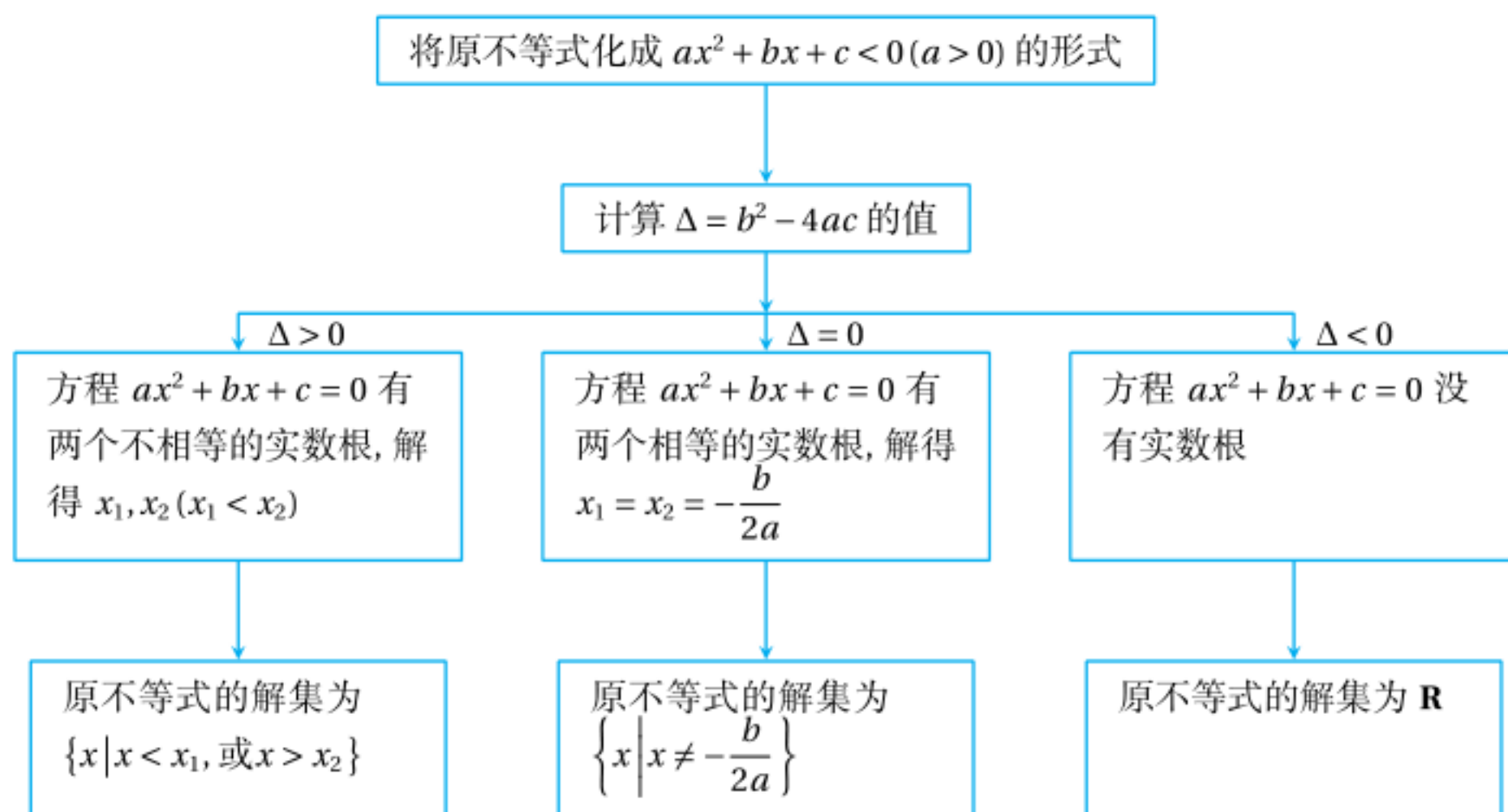


图 2.3-1

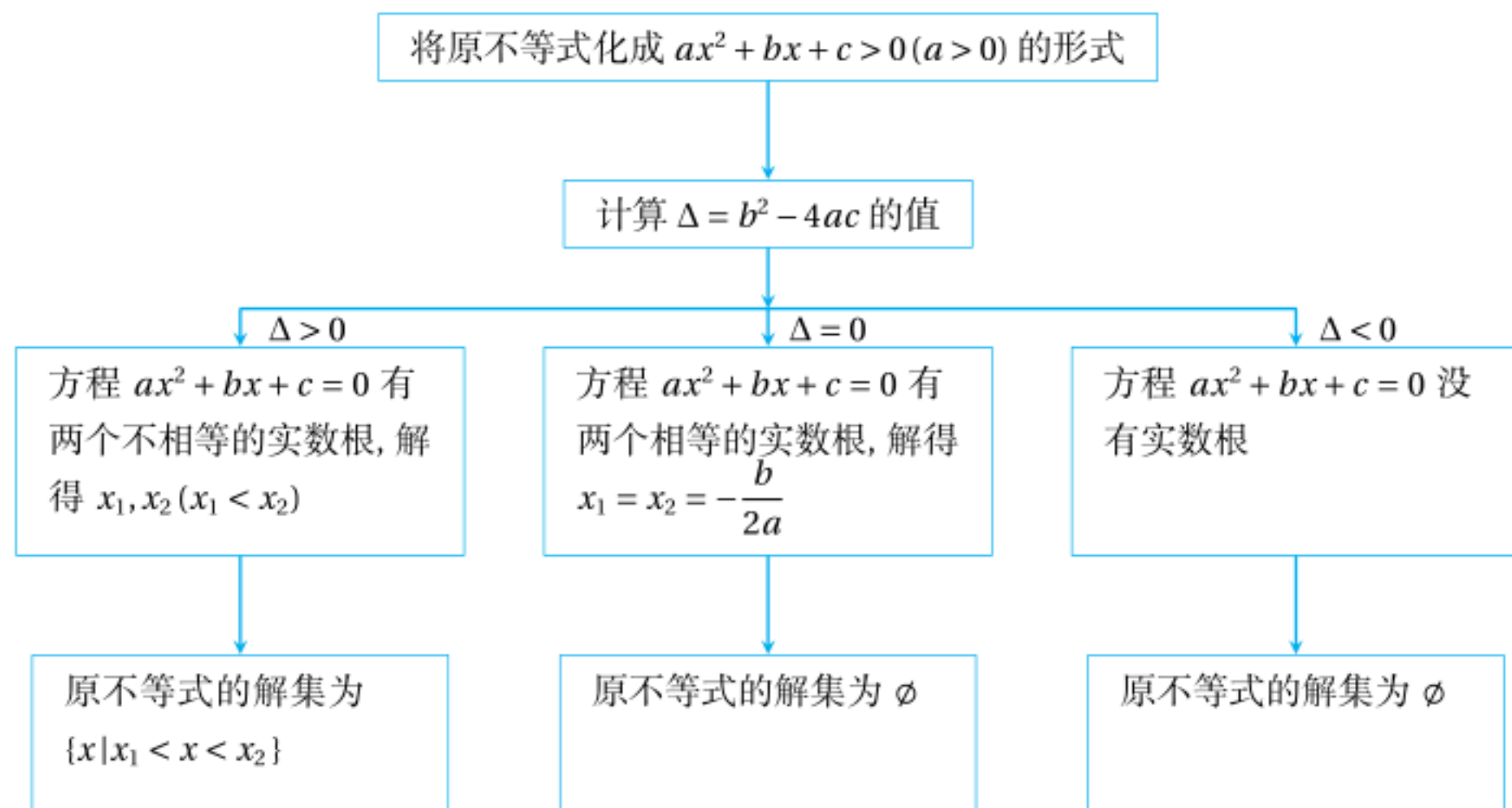


图 2.3-2

全国新高考高中数学老师教研备课微信群定期分享高中数学资料, 方便老师教研备课。包括 ppt 课件、word 教案、教学设计、名校资料、模拟试卷、高考真题、教辅图书、名师讲义、培优课程、名师网课等等优质高中数学资料! 欢迎各位高中数学老师加入, 共同交流, 实现资源共享! 需要进群请加微信: A57585857 或扫码进群!





函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

1. 设 A, B 是非空的实数集, 如果对于集合 A 中的任意一个数 x , 按照某种确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应, 那么就称: $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数 (function), 记作

$$y = f(x), x \in A$$

其中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域 (domain); 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域 (range). 值域是集合 B 的子集.

2. 设 a, b 是两个实数, 而且 $a < b$. 我们规定:
- (1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$;
 - (2) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为 (a, b) ;
 - (3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为 $[a, b), (a, b]$.

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点.

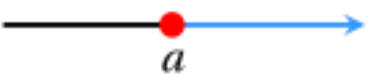
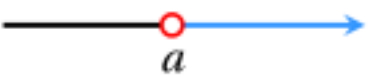

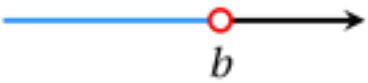
3. 区间的几何表示如表3.1-1所示. 在数轴表示时, 用实心点表示包括在区间内的端点, 用空心点表示不包括在区间内的端点.

表 3.1-1

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x a \leq x < b\}$	半开半闭区间	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	半开半闭区间	$(a, b]$	

4. 实数集 \mathbf{R} 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$, “ ∞ ” 读作 “无穷大”, “ $-\infty$ ” 读作 “负无穷大”, “ $+\infty$ ” 读作 “正无穷大”.
5. 如表3.1-2, 把满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的集合, 用区间分别表示为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$.

表 3.1-2

定义	符号	数轴表示
$\{x x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	

6. 函数的构成要素为: 定义域、对应关系和值域. 如果两个函数的定义域相同, 并且对应关系完全一致, 即相同的自变量对应的函数值也相同, 那么这两个函数是同一个函数.

3.1.2 函数的表示法

1. 函数的表示法: 解析法、列表法和图象法.
2. 像 $y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ 这样的函数称为分段函数.

阅读与思考 函数概念的发展历程

3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 区间 $D \subseteq I$:
- (1) 如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增 (图3.2-1 (1)). 特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时, 就称它是增函数 (increasing function).

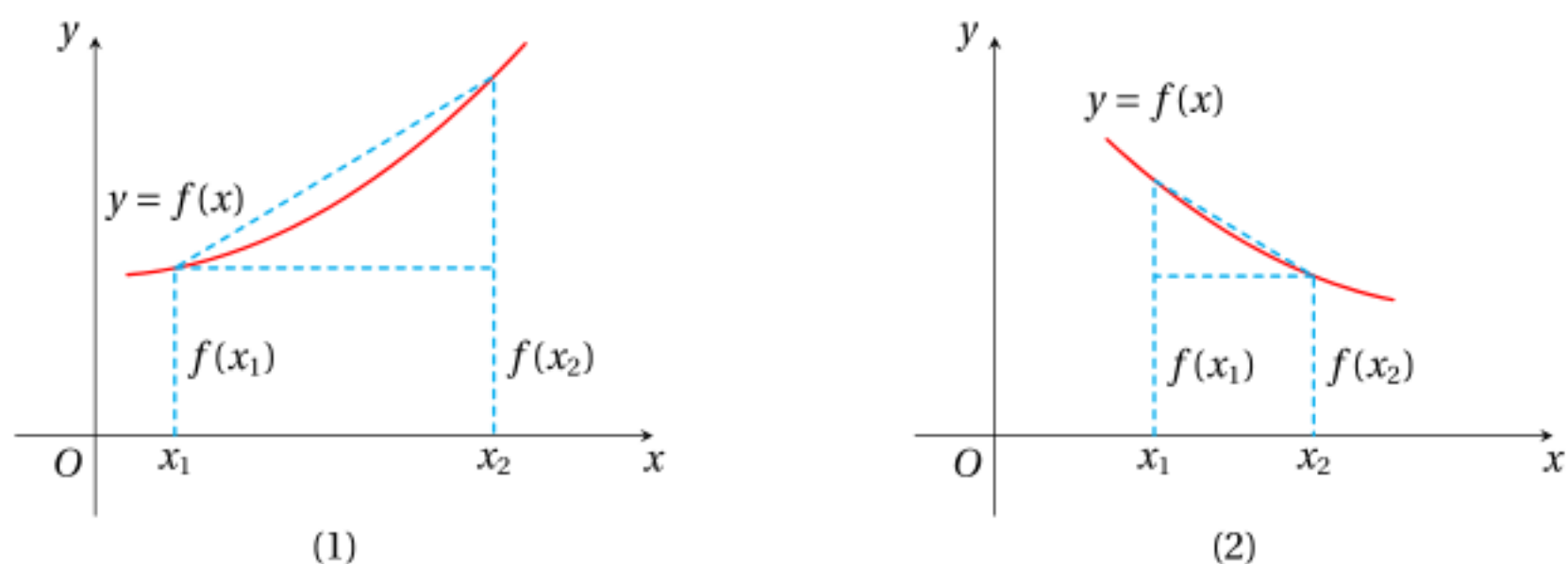


图 3.2-1

- (2) 如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上**单调递减** (图3.2-1 (2)). 特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时, 就称它是**增函数** (increasing function).
2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减, 就说函数 $f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.
3. 函数 $f(x)$ 在区间 I 单调递增, 则其图象从左向右上升; 函数 $f(x)$ 在区间 I 单调递减, 则其图象从左向右下降.
4. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足:
- (1) $\forall x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$;
 - (2) $\exists x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$.

那么, 我们称 M 是函数 $y = f(x)$ 的**最大值** (maximum value).

5. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足:
- (1) $\forall x \in I$, 都有 $f(x) \geq M$;
 - (2) $\exists x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$.

那么, 我们称 M 是函数 $y = f(x)$ 的**最小值** (minimum value).

3.2.2 奇偶性

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 如果 $\forall x \in I$, 都有 $-x \in I$, 且 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**偶函数** (even function). 函数 $y = f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称.
2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 如果 $\forall x \in I$, 都有 $-x \in I$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**奇函数** (odd function). 函数 $y = f(x)$ 是奇函数的充要条件是它的图象关于原点对称.
3. 奇偶性是函数在它的定义域上的整体性质, 所以判断函数的奇偶性应先明确它的定义域.

信息技术应用 用计算机绘制函数图象

3.3

幂函数

1. 函数 $y = x^\alpha$ 叫做**幂函数** (power function), 其中 x 是自变量, α 是常数.
2. 在同一坐标系中画出函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y = x^{-1}$ 的图象 (如图3.3-1)

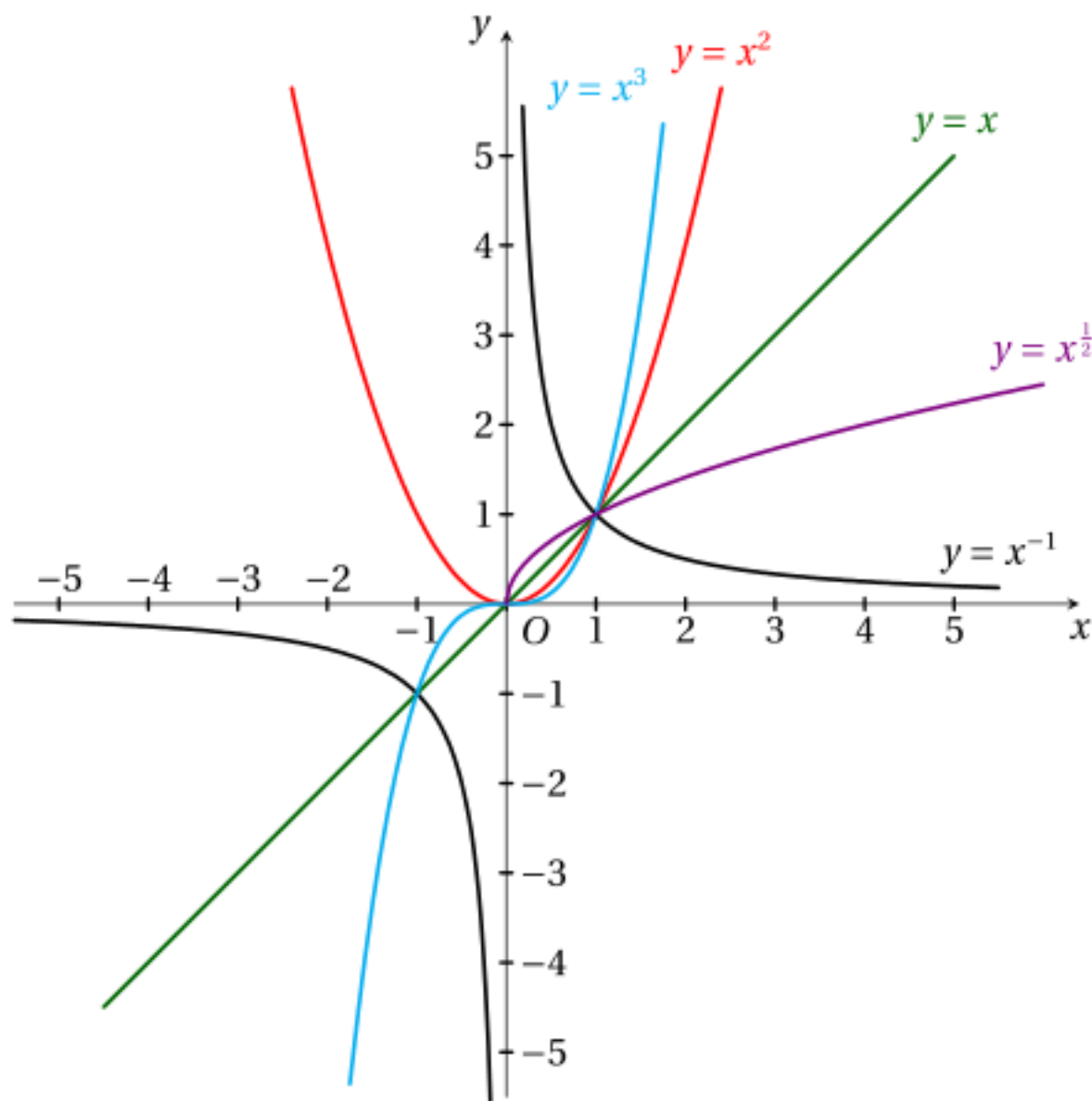


图 3.3-1

3. 五个幂函数的结论如表3.3-1

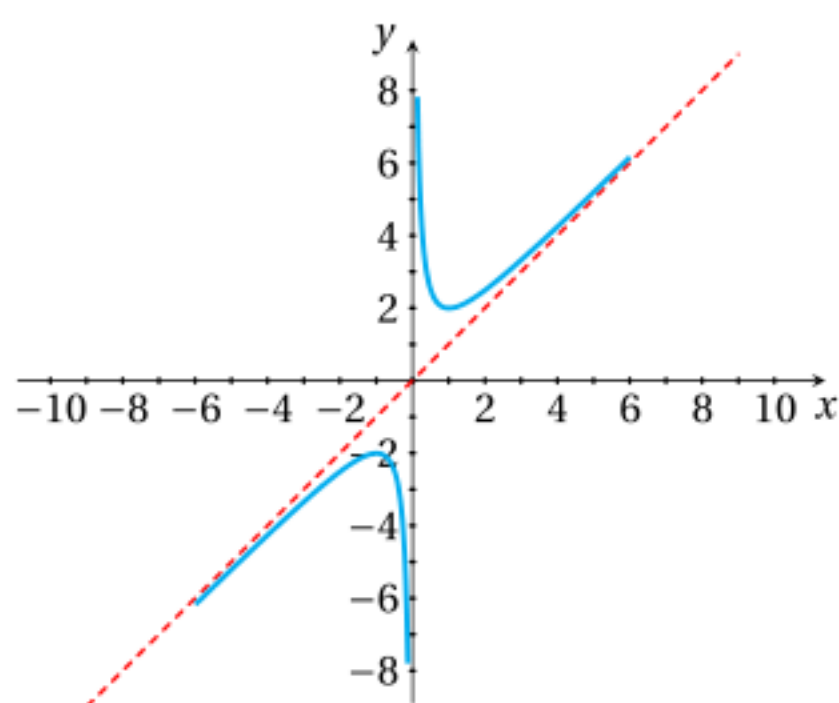
表 3.3-1

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
定义域	\mathbf{R}	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	\mathbf{R}	$[0, +\infty)$	\mathbf{R}	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶	奇函数
单调性	增函数	$(-\infty, 0]$ 减, $[0, +\infty)$ 增	增函数	增函数	$(-\infty, 0)$ 减, $(0, +\infty)$ 减

4. 通过图3.3-1与表3.3-1, 我们得到:
- (1) 函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y = x^{-1}$ 的图象都通过点 $(1, 1)$;
- (2) 函数 $y = x, y = x^3, y = x^{-1}$ 是奇函数, 函数 $y = x^2$ 是偶函数;
- (3) 在区间 $(0, +\infty)$ 上, 函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{\frac{1}{2}}$ 单调递增, 函数 $y = x^{-1}$ 单调递减;
- (4) 在第一象限内, 函数 $y = x^{-1}$ 的图象向上与 y 轴无限接近, 向右与 x 轴无限接近.

探究与发现 探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质

1. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
2. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
3. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1]$ 递增, $[-1, 0)$ 递减, $(0, 1]$ 递减, $[1, +\infty)$ 递增.
4. 当 $x > 0$ 时, $y = x + \frac{1}{x}$ 有最小值 2, 当 $x = 1$ 时取到; 当 $x < 0$ 时, $y = x + \frac{1}{x}$ 有最大值 -2, 当 $x = -1$ 时取到.
5. 在第一象限内, $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象向上与 y 轴无限接近, 向右与直线 $y = x$ 无限接近; 在第三象限内, $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象向下与 y 轴无限接近, 向左与直线 $y = x$ 无限接近.
6. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 是奇函数.
7. $y = x + \frac{1}{x}$ 图象如图



3.4 函数的应用 (一)

文献阅读与数学写作

4

指数函数与对数函数

4.1 指数

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

1. 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

- ① 当 n 是奇数时, 正数的 n 次方根是一个正数, 负数的 n 次方根是一个负数. 这时, a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示.
- ② 当 n 是偶数时, 正数的 n 次方根有两个, 这两个数互为相反数. 这时, 正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示, 负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示, 两者可以合并写成 $\pm \sqrt[n]{a} (a > 0)$.

2. 负数没有偶次方根.

3. 0 的任何次方根都是 0, 记作 $\sqrt[n]{0} = 0$.

4. 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式 (radical), 这里 n 叫做根指数, a 叫做被开方数.

5. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

6. ① 当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$;

② 当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

7. 正数的正分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

8. 正数的负分数指数幂的意义是

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

9. 0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

10. 整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用, 即对于任意有理数 r, s , 均有

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{Q}$);

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{Q}$);

(3) $(ab)^r = a^r b^r$ ($a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q}$).

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质

- 1. 无理数指数幂 a^α ($a > 0, \alpha$ 为无理数) 是一个确定的实数.
- 2. 整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂, 即对于任意实数 r, s , 均有

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$);

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$);

(3) $(ab)^r = a^r b^r$ ($a > 0, b > 0, r \in \mathbf{R}$).

4.2 指数函数

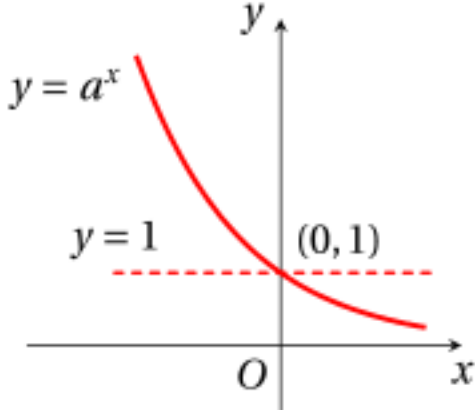
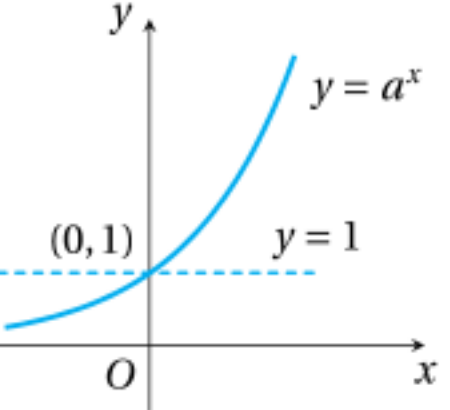
4.2.1 指数函数的概念

- 1. 增长率为常数的变化方式, 称为指数增长.
- 2. 函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 叫做指数函数 (exponential function), 其中指数 x 是自变量, 定义域是 \mathbf{R} .

4.2.2 指数函数的图象和性质

- 1. 底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称.
- 2. 指数函数的图象和性质如表4.2-1所示.

表 4.2-1

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定 义 域	\mathbf{R}	
值 域	$(0, +\infty)$	
性 质	(1) 过定点 $(0, 1)$, 即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	(2) 减函数	(2) 增函数

阅读与思考 放射性物质的衰减

信息技术应用 探究指数函数的性质

4.3 对数函数

4.3.1 对数的概念

1. 如果 $a^x = N(a > 0$, 且 $a \neq 1)$, 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的**对数** (logarithm), 记作

$$x = \log_a N,$$

其中 a 叫做对数的**底数**, N 叫做**真数**.

2. 以 10 为底的对数叫做**常用对数** (common logarithm), $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$. 以无理数 $e = 2.71828 \cdots$ 为底数的对数称为**自然对数** (natural logarithm), $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

3. 当 $a > 0, a \neq 1$ 时, $a^x = N \iff x = \log_a N$.

4. 负数和 0 没有对数;

5. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$

4.3.2 对数的运算

1. 对数的运算性质如下.

如果 $a > 1$, 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$

(3) $\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R}).$

2. 下式称为对数换底公式.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; b > 0; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1).$$

3. $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

阅读与思考 对数的发明

4.3.3 对数函数的概念

1. 函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做对数函数 (logarithmic function), 其中 x 是自变量, 定义域是 $(0, +\infty)$.

4.3.4 对数函数的图象和性质

1. 底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 x 轴对称.

2. 对数函数的图象和性质如表4.3-1所示.

表 4.3-1

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定 义 域	$(0, +\infty)$	
值 域	\mathbf{R}	
性 质	(1) 过定点 $(1, 0)$, 即 $x = 1$ 时, $y = 0$	
	(2) 减函数	(2) 增函数

3. 指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 与对数函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 互为反函数(inverse function), 它们的定义域与值域正好互换.

探究与发现 互为反函数的两个函数图象间的关系

1. 指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 与对数函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

4.3.5 不同函数增长的差异

1. 指数函数不像一次函数那样按同一速度增长, 而是越来越快, 呈爆炸性增长.
2. 指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 与一次函数 $y = kx (k > 0)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上都单调递增, 但它们的增长速度不同, 而且不在同一个“档次”上. 随着 x 的增大, $y = a^x (a > 1)$ 的增长速度越来越快, 会超过并远远大于 $y = kx (k > 0)$ 的增长速度. 尽管在 x 的一定变化范围内, a^x 可能会小于 kx , 但由于 $y = a^x (a > 1)$ 的增长最终会快于 $y = kx (k > 0)$ 的增长, 因此, 总会存在一个 x_0 , 当 $x > x_0$ 时, 恒有 $a^x > kx$.
3. 对数函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 与一次函数 $y = kx (k > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上都单调递增, 但它们的增长速度不同. 随着 x 的增大, 一次函数 $y = kx (k > 0)$ 保持固定的增长速度, 而对数函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 的增长速度越来越慢. 不论正数 a 的值为多少, 在一定范围内, $\log_a x$ 可能会大于 kx , 但由于 $\log_a x$ 的增长慢于 kx 的增长, 因此总会存在一个 x_0 , 当 $x > x_0$ 时, 恒有 $\log_a x < kx$.

4.4 函数的应用 (二)

4.4.1 函数的零点与方程的解

1. 使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $y = f(x)$ 的**零点** (zero point).

2.

方程 $f(x) = 0$ 有实数解

\iff 函数 $y = f(x)$ 有零点

\iff 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有公共点.

3. **函数零点存在定理** 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a)f(b) < 0$, 那么, 函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, 这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的解.

4.4.2 用二分法求方程的近似解

1. 称 $x = \frac{a+b}{2}$ 为区间 (a, b) 的中点.

2. 对于在区间 $[a, b]$ 上图象连续不断且 $f(a)f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$, 通过不断地把它的零点所在区间一分为二, 使所得区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫做**二分法** (bisection).

3. 给定精确度 ϵ , 用二分法求函数 $y = f(x)$ 零点 x_0 的近似值的一般步骤如下:

(1) 确定零点 x_0 的初始区间 $[a, b]$, 验证 $f(a)f(b) < 0$.

(2) 求区间 (a, b) 的中点 c .

(3) 计算 $f(c)$, 并进一步确定零点所在的区间:

① 若 $f(c) = 0$ (此时 $x_0 = c$), 则 c 就是函数的零点;

② 若 $f(a)f(c) < 0$ (此时 $x_0 \in (a, c)$), 则令 $b = c$;

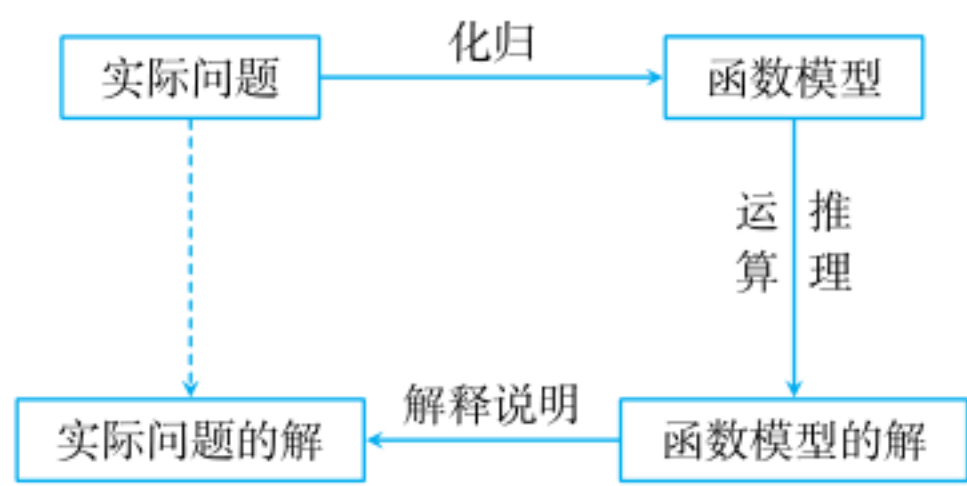
③ 若 $f(c)f(b) < 0$ (此时 $x_0 \in (c, b)$), 则令 $a = c$.

(4) 判断是否达到精确度 ϵ : 若 $|a - b| < \epsilon$, 则得到零点近似值 a (或 b); 否则重复步骤 2 ~ 4.

阅读与思考 中外历史上的方程求解

4.4.3 函数模型的应用

1. 用函数建立数学模型解决实际问题的基本过程如下:



文献阅读与数学写作 对数概念的形成与发展

5

三角函数

5.1 任意角和弧度制

5.1.1 任意角

1. 一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**, 按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**. 如果一条射线没有做任何旋转, 就称它形成了一个**零角**. 零角的始边与终边重合. 这样就把角的概念推广到了**任意角** (any angle), 包括正角、负角和零角.
2. 如果两个角的旋转方向相同且旋转量相等, 就称这两个角相等.
3. 把角 α 的终边旋转角 β , 这时终边所对应的角是 $\alpha + \beta$.
4. 把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角. 角 α 的相反角记为 $-\alpha$. 角的减法可以转化为角的加法, 即

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

5. 通常在直角坐标系内讨论角, 使角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么, 角的终边在第几象限, 就说这个角是第几象限角.
6. 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

5.1.2 弧度制

1. 用度作为单位来度量角的单位制叫做**角度制**, 用弧度作为单位来度量角的单位制叫做**弧度制**.
2. 长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做**1弧度** (radian) 的角, 弧度单位用符号 rad 表示, 读作弧度.
3. 半径为 1 的圆叫做单位圆. 在单位圆中, \widehat{AB} 的长等于 1, $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角.
4. 在半径为 r 的圆中, 弧长为 l 的弧所对的圆心角为 $\alpha \text{ rad}$, 那么

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

其中, α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定, 即逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负.

5. 正角的弧度数是一个正数, 负角的弧度数是一个负数, 零角的弧度数是 0.

6. 根据图 5.1-1 可以进行弧度与角度的换算.

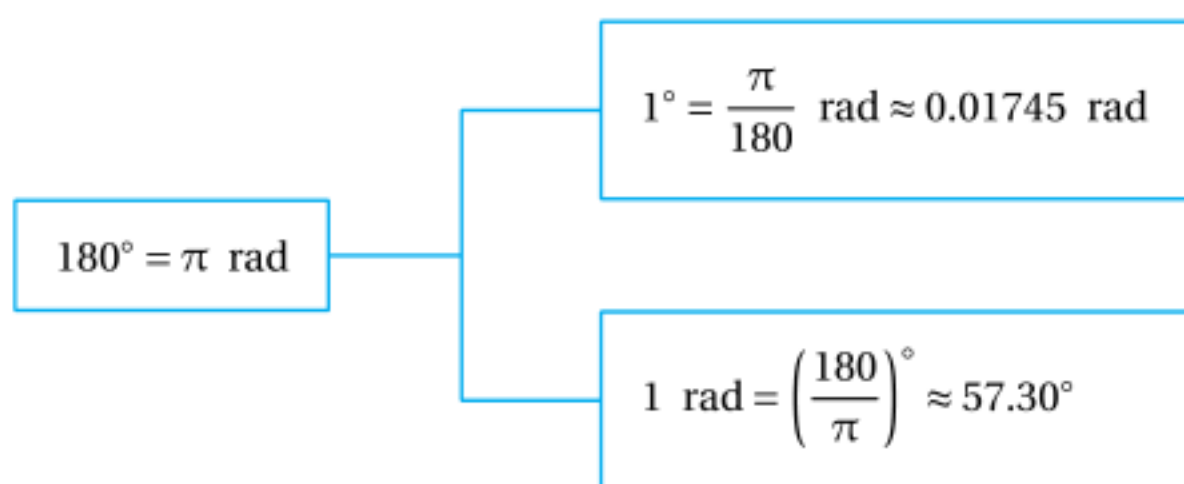


图 5.1-1

7. R 是圆的半径, $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$ 为圆心角, l 是扇形的弧长, S 是扇形的面积, 则

(1) $l = \alpha R$; (2) $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$; (3) $S = \frac{1}{2} l R$.

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念

1. 设 α 是一个任意角, $\alpha \in \mathbf{R}$, 它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x, y)$.

(1) 把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的**正弦函数** (sine function), 记作 $\sin \alpha$, 即

$$y = \sin \alpha;$$

(2) 把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的**余弦函数** (cosine function), 记作 $\cos \alpha$, 即

$$x = \cos \alpha;$$

(3) 把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的**正切函数** (tangent function), 记作 $\tan \alpha$, 即

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0).$$

2. 正弦函数、余弦函数和正切函数统称为**三角函数** (trigonometric function), 通常记为:

正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$;

余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$;

正切函数 $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

3. 设 α 是一个任意角, 它的终边上任意一点 P (不与原点 O 重合) 的坐标为 (x, y) , 点 P 与原点的距离为 r , 则

(1) $\sin \alpha = \frac{y}{r}$; (2) $\cos \alpha = \frac{x}{r}$; (3) $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

4. 三角函数值在各象限的符号如图 5.2-1 所示.

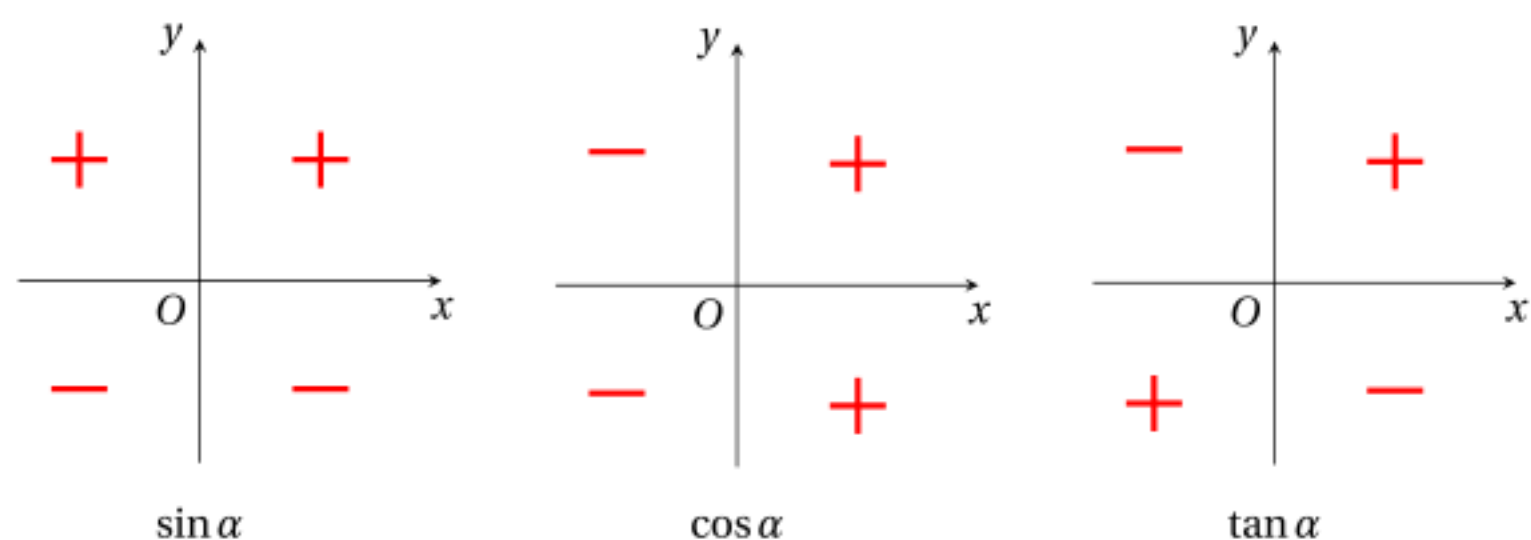


图 5.2-1

5. 终边相同的角的同一三角函数的值相等.由此得到一组公式 (公式一):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \tan \alpha, \\ \text{其中 } k \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

6. 由公式一可知,三角函数值有“周而复始”的变化规律,即角 α 的终边每绕原点旋转一周,函数值将重复出现.利用公式一,可以把求任意角的三角函数值,转化为求 $0 \sim 2\pi$ (或 $0^\circ \sim 360^\circ$) 角的三角函数值.

7. 常用特殊角三角函数值如表 5.2-1.

表 5.2-1

α 角度	α 弧度	正弦 $\sin \alpha$	余弦 $\cos \alpha$	正切 $\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

5.2.2 同角三角函数的基本关系

1. 同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于 1, 商等于角 α 的正切.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

阅读与思考 三角学与天文学

5.3 诱导公式

1. 公式二

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

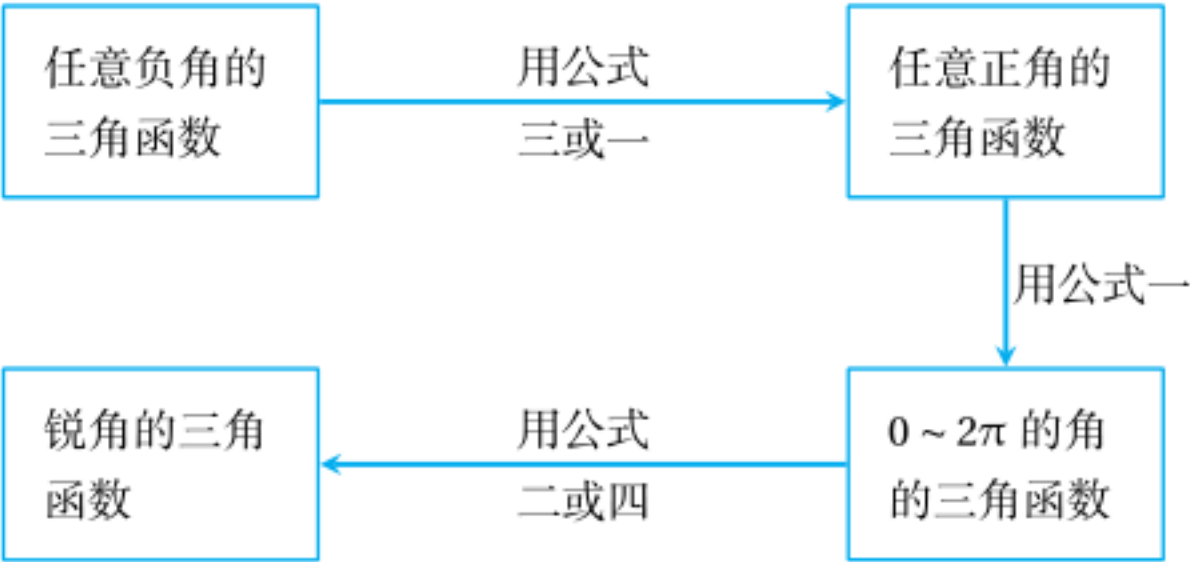
2. 公式三

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

3. 公式四

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

4. 利用公式一 ~ 公式四, 可以把任意角的三角函数转化为锐角三角函数, 一般可按下面步骤进行:



5. 公式五

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha.\end{aligned}$$

6. 公式六

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin\alpha.\end{aligned}$$

7. 公式一 ~ 公式六都叫做**诱导公式** (induction formula).

5.4 三角函数的图象与性质

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

1. 正弦函数的图象叫做**正弦函数** (sine curve), 是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线, 如图5.4-1.

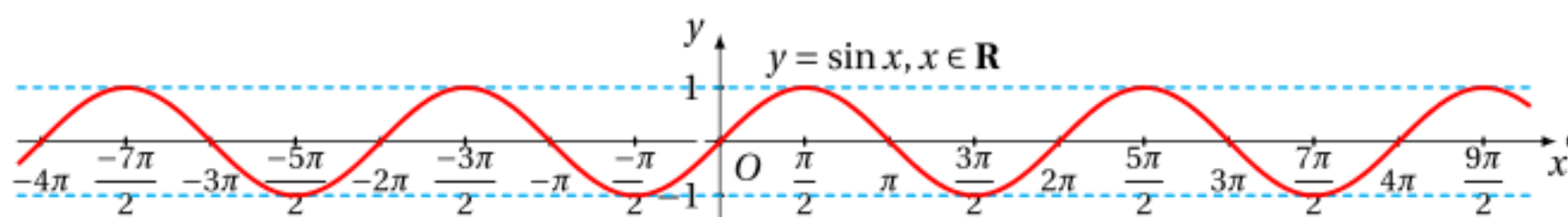


图 5.4-1

2. 在函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象上, 以下五个点:

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$$

在确定图象形状时起关键作用. 先找出这五个关键点, 再用光滑曲线将它们连接起来, 得到正弦函数的简图. 这种近似的“五点(画图)法”是非常实用的.

3. 将正弦函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 各单位长度, 就得到余弦函数的图象, 如图5.4-2所示. 余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$ 的图象叫做**余弦曲线** (cosine curve). 它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪起伏”的连续光滑曲线, 也可以用“五点法”画简图.

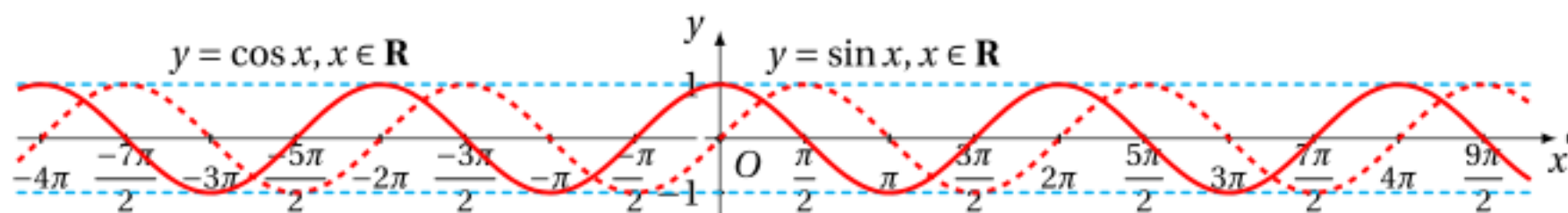


图 5.4-2

5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

1 周期性

1. 对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做**周期函数** (periodic function). 非零常数 T 叫做这个函数的**周期** (period).

2. 周期函数的周期不止一个. 如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期, 那么, $\forall k \in \mathbf{Z}$ 且 $k \neq 0$, 常数 $2kT$ 都是 $f(x)$ 的周期.
3. 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的**最小正周期** (minimal positive period).
4. 正弦函数是周期函数, $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$ 且 $k \neq 0$) 都是它的周期, 最小正周期是 2π .
5. 余弦函数也是周期函数, $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$ 且 $k \neq 0$) 都是它的周期, 最小正周期是 2π .
6. 如果函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 那么 $f(\omega x)$ (其中 $\omega \neq 0$) 的最小正周期为 $\frac{T}{|\omega|}$.

2 奇偶性

正弦函数是奇函数, 余弦函数是偶函数.

3 单调性

1. 正弦函数在每一个闭区间 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都单调递增, 其值从 -1 增大到 1 ; 在每一个闭区间 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都单调递减, 其值从 1 减小到 -1 .
2. 余弦函数在每一个闭区间 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都单调递增, 其值从 -1 增大到 1 ; 在每一个闭区间 $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都单调递减, 其值从 1 减小到 -1 .

4 最大值与最小值

1. 正弦函数当且仅当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时取得最大值 1 , 当且仅当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时取得最小值 -1 ;
2. 余弦函数当且仅当 $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时取得最大值 1 , 当且仅当 $x = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时取得最小值 -1 .

5.4.3 正切函数的性质与图象

1. 正切函数的图象叫做**正切曲线** (tangent curve), 如图5.4-3所示.

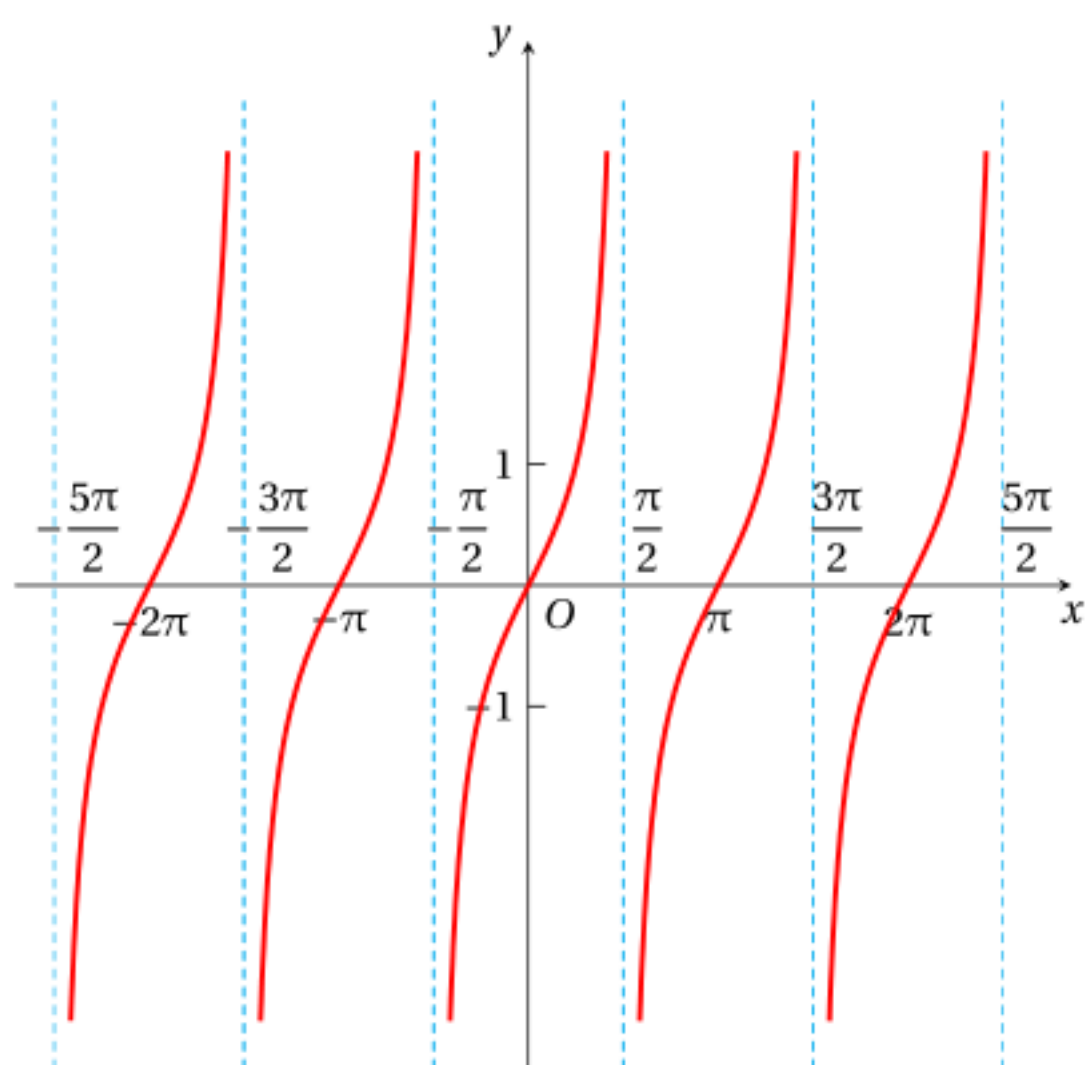


图 5.4-3

1 周期性

正切函数是周期函数, 周期是 π .

2 奇偶性

正切函数是奇函数.

3 单调性

正切函数在每一个区间 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ 上都单调递增.

4 值域

正切函数的值域是实数集 \mathbb{R} .

5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

1 两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

(C_(α-β))

2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

(C_(α+β))

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

(S_(α+β))

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

(S_(α-β))

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

(T_(α+β))

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

(T_(α-β))

公式S_(α+β), C_(α-β), T_(α+β)给出了任意角α, β的三角函数值与其和角α+β的三角函数值之间的关系, 这三个公式叫做和角公式. 类似地, S_(α-β), C_(α+β), T_(α-β)都叫做差角公式.

3 二倍角的正弦、余弦、正切公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

(S_{2α})

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

(C_{2α})

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

(T_{2α})

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

以上这些公式都叫做倍角公式.

信息技术应用 利用信息技术制作三角函数表

5.5.2 简单的三角恒等变换

1. 半角公式

$$(1) \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$(2) \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$(3) \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

符号由 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限决定.

2. 降幂公式

$$(1) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

$$(2) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$(3) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha),$$

$$(4) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

3. 积化和差公式

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)];$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

4. 和差化积公式

$$(1) \sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2};$$

$$(2) \sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2};$$

$$(3) \cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2};$$

$$(4) \cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2};$$

5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

5.6.1 匀速圆周运动的数学模型

5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

1. 把正弦曲线上的所有点向左 (当 $\varphi > 0$ 时) 或向右 (当 $\varphi < 0$ 时) 平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 就得到函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象.

- 函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$, 把 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象上所有点的横坐标缩短 (当 $\omega > 1$ 时) 或伸长 (当 $0 < \omega < 1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变), 就得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.
- 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$) 的图象, 可以看作是把 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象上所有点的纵坐标伸长 (当 $A > 1$ 时) 或缩短 (当 $0 < A < 1$ 时) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$) 的值域是 $[-A, A]$, 最大值是 A , 最小值是 $-A$.
- 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象, 可以用下面的方法得到: 先画出函数 $y = \sin x$ 的图象; 再把正弦曲线向左 (或右) 平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象; 然后把曲线上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象; 最后把曲线上各点的纵坐标变为原来的 A 倍 (横坐标不变), 这时的曲线就是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

5.7 三角函数的应用

- 在物理学中, 把物体收到的力 (总是指向平衡位置) 正比于它离开平衡位置的运动的运动称为“简谐运动”. 在适当的直角坐标系下, 简谐运动可以用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in [0, +\infty)$ 表示, 其中 $A > 0, \omega > 0$.
- A 就是这简谐运动的**振幅**, 它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离;
- 这个简谐运动的**周期**是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 它是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间;
- 这个简谐运动的**频率**由公式 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 给出, 它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数;
- $\omega x + \varphi$ 称为**相位**; $x = 0$ 时的相位 φ 称为**初相**.

阅读与思考 振幅、周期、频率、相位

全国新高考高中数学老师教研备课微信群定期分享高中数学资料, 方便老师教研备课。包括 ppt 课件、word 教案、教学设计、名校资料、模拟试卷、高考真题、教辅图书、名师讲义、培优课程、名师网课等等优质高中数学资料! 欢迎各位高中数学老师加入, 共同交流, 实现资源共享! 需要进群请加微信: A57585857 或扫码进群!



VV99.net

免费文档下载