

七升八数学《知识点总结》暑假预习

第13章《三角形》

第01讲 三角形的概念

知识点01 三角形的认识与分类

1. 三角形的认识:

如图:由三条不在同一直线上的线段首位顺次连接组成的图形。用符号“ \triangle ”来表示,表示为 $\triangle ABC$ 。

其中:点A、点B、点C是三角形的顶点。

线段AB、BC、AC是三角形的边。 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 是三角形的角。

AB、AC与 $\angle A$ 相邻,所以是 $\angle A$ 的邻边,BC与 $\angle A$ 相对,所以是 $\angle A$ 的对边;同理可得 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的邻边与对边。

题型考点:①判断认识三角形。

2. 三角形的分类:

三角形可按边或角进行分类。

(1) 按边分类:

三角形分为有边相等:①等腰三角形(两边相等)

②等边三角形(三边相等)和无边相等:不等边三角形。

(2) 按角分类:

①有一个角是直角(直角三角形)②所有角都是锐角(锐角三角形)

③有一个角是钝角(钝角三角形)②③统称(斜三角形)

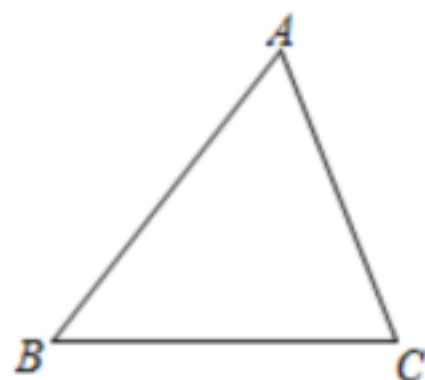
知识点02 三角形的三边关系

1. 三角形的三边关系:

由两点之间线段最短可知,三角形的任意两边之和大于第三边。任意两边之差小于第三边。

解题时常用两边之差小于第三边小于两边之和建立不等式。

题型考点:①判断能否构成三角形。②求第三边的范围。



第02讲 与三角形有关的线段

知识点01 三角形的中线

1. 三角形中线的定义:

如图,三角形的顶点与对边中点的连线段叫做三角形的中线。

2. 三角形中线的性质:

①AM是三角形的中线 $\Leftrightarrow M$ 是BC的中点 $\Leftrightarrow BM = CM = \frac{1}{2}BC$ 。

②中线平分三角形的面积。即: $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$

③中线分三角三角形的周长差等于对应另两边的差。即: $C_{\triangle ABM} - C_{\triangle ACM} = AB - AC$

④三角形有3条中线,且三条中线交于一点,叫做三角形的重心。

题型考点:①利用中线的性质进行与周长与面积有关的计算。

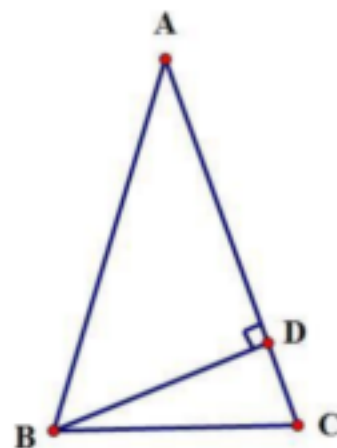
知识点02 三角形的高线

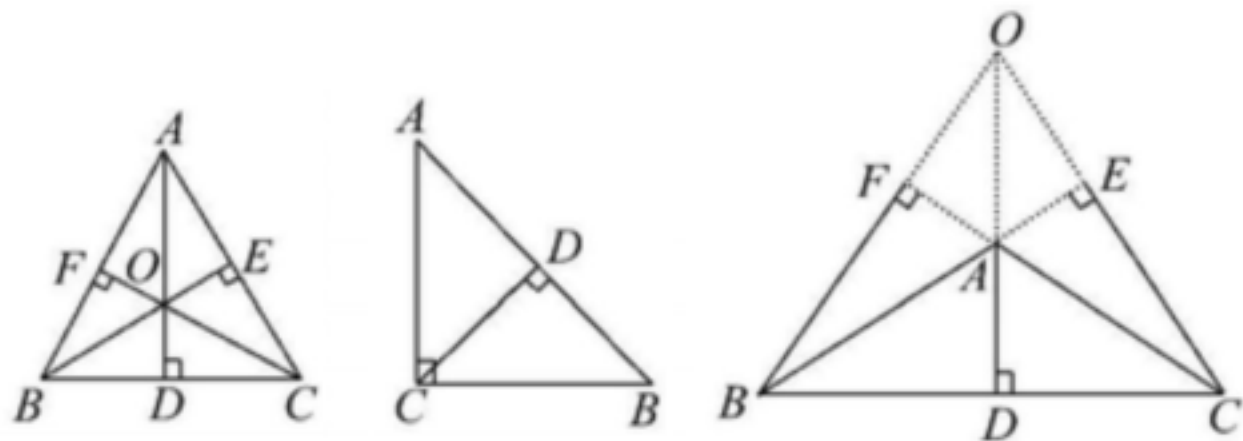
1. 三角形高线的定义:

如图,过三角形的顶点作对边的垂线,顶点与垂足之间的线段是三角形的高线。

BD是 $\triangle ABC$ 的高 $\Leftrightarrow BD \perp AC$

2. 锐角三角形、直角三角形以及钝角三角形所有高线的画法:





3. 三角形的垂心:

三角形有 3 条高线, 且三条高线交于一点, 这个点叫做三角形的垂心,

4. 高线与垂心的位置与三角形形状的关系:

锐角三角形的三条高都在三角形内部, 垂心在三角形内,

直角三角形有两条高是三角形的边, 垂心在三角形上,

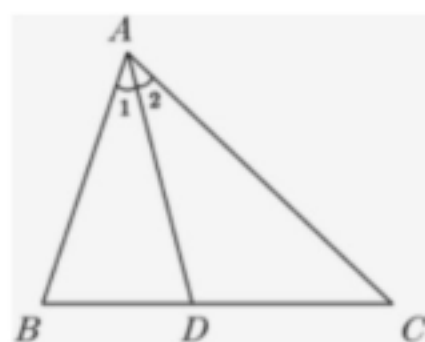
钝角三角形有两条高在三角形外, 垂心在三角形外。

题型考点: ①三角形高线的判断与作图。②根据高线与垂心的位置判断三角形的形状。

知识点 03 三角形的角平分线

1. 三角形角平分线的定义:

如图。三角形的一个内角平分线与这个角对边相交, 顶点和交点之间的线段是三角形的角平分线。



2. 三角形角平分线的性质:

①AD 是三角形的角平分线 $\Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$,

②三角形的角平分线把三角形分得的两个小三角形的面积比等于被角平分线分边分得的两条线段比。即

$$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \underline{BD} : \underline{CD}。$$

③三角形有 3 条角平分线, 三条角平分交于一点, 这一点叫做三角形的内心,

题型考点: ①角平分线的认识。

知识点 04 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性:

三角形的三条边确定, 则这个三角形的形状和大小就会确定。这就是三角形的稳定性。

题型考点: 判断三角形的稳定性在生活中的应用。

第 03 讲 三角形的内角与外角

知识点 01 三角形的内角和定理

1. 三角形内角和定理的内容: 三角形的三个内角之和等于 180° 。

2. 三角形内角和定理的证明:

证明思路: 过三角形任意一个顶点作对边的平行线即可证明。

如图: 过点 A 作 PQ 平行于 BC,

$\because PQ \parallel BC$

$\therefore \angle B = \underline{\angle PAB}; \angle C = \underline{\angle QAC}。$

$\because \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC = \underline{180^\circ}。$

$\therefore \angle BAC + \angle B + \angle C = \underline{180^\circ}。$

题型考点: ①利用三角形的内角和计算角度。②判断三角形的形状。

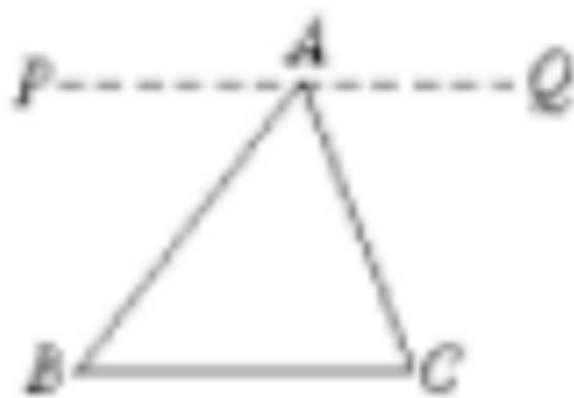
知识点 02 直角三角形的性质与判定

1. 直角三角形的定义:

有一个角是直角的三角形。用 $Rt\triangle ABC$ 表示直角三角形 ABC。

2. 直角三角形的性质: 直角三角形的两个锐角 互余。

数学语言: $\because \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ \therefore \angle A + \angle B = \underline{90^\circ}。$



3. 直角三角形的判定:

有两个角互余的三角形是直角三角形。数学语言: $\because \angle A + \angle B = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 是 直角 三角形。题型考点: ①利用直角三角形的两锐角互余以及三角形的内角和进行角度计算。②直角三角形的判断。

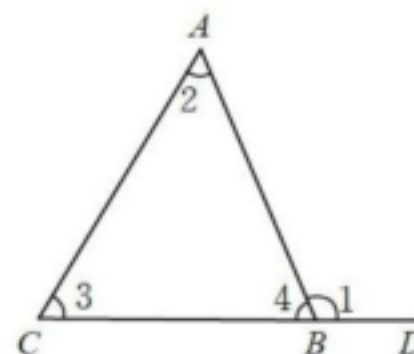
知识点 03 三角形的外角定理

1. 外角的定义:

如图, 三角形的一条边与另一条边的 延长线 构成的夹角叫做三角形的外角。

2. 外角性质:

①外角定理: 三角形的一个外角等于 它不相邻的两个内角之和。即 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ 。



②三角形的一个外角 大于 不相邻的任意一个内角。

③三角形的外角与相邻的内角 互补。

④三角形的外角和都等于 360° 。

题型考点: 根据外角定理求值。

第 14 章《全等三角形》

第 01 讲 全等三角形及其性质

知识点 01 全等形的概念

1. 全等形的概念:

形状和大小完全一样的两个图形叫做全等形。即能够 完全重合 的两个图形叫做全等形。

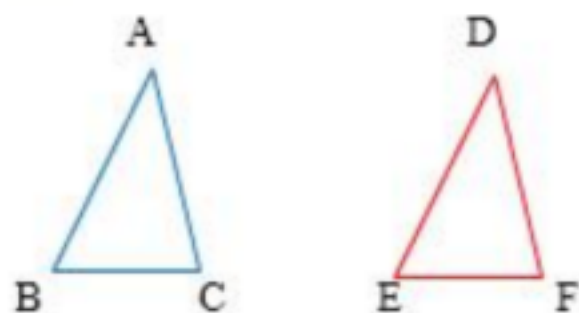
题型考点: ①概念理解。②全等形判断。

知识点 02 全等三角形

2. 全等三角形的概念:

形状和大小完全一样的两个三角形叫做全等三角形。即能够 完全重合 的两个三角形叫做全等三角形。

3. 全等三角形的相关概念:



如图, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等。则其中:
能够重合的点叫做全等三角形的 对应点。

能够重合的边叫做全等三角形的 对应边。

能够重合的角叫做全等三角形的 对应角。

用符号 “ \cong ” 连接, 读作 全等于。表示 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。对应点必须写在对应的位置。

题型考点: ①判断全等三角形的对应关系。

知识点 03 全等三角形的性质

1. 全等三角形的性质:

由全等三角形的性质及其相关概念可知:

①全等三角形的对应边 相等。对应角也 相等。

②全等三角形对应边上的 中线、高线、角平分线 分别 对应相等。

③全等的两个三角形它们的周长和面积分别 对应相等。

第 02 讲 全等三角形的判定

知识点 01 边边边 (SSS) 判定全等

1. 概念:

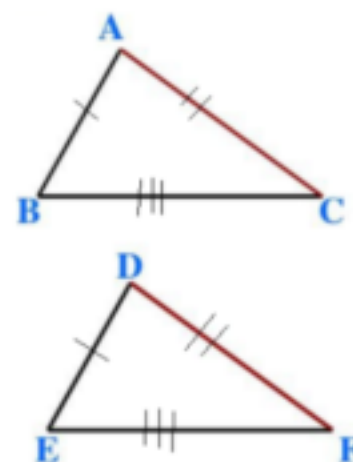
三条边分别对应相等的两个三角形全等。

2. 数学语言:

如图: 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中:

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SSS)}.$$

题型考点: ①添加全等判定条件。②全等判定。



知识点 02 边角边 (SAS) 判定全等

1. 概念:

两边及其夹角对应相等的两个三角形全等。

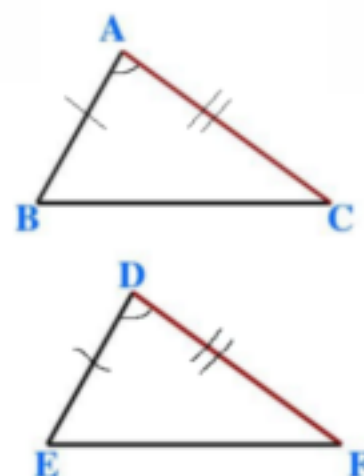
2. 数学语言:

如图: 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中:

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle A = \angle D \\ AC = DF \end{cases} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

题型考点: ①添加全等判定条件。

②全等判定。



知识点 03 角边角 (ASA) 判定全等

1. 概念:

两角及其夹边对应相等的两个三角形全等。

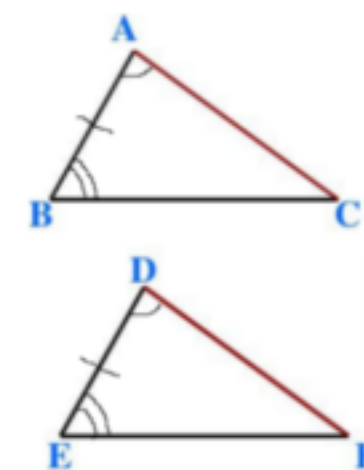
2. 数学语言:

如图, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中:

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AB = DE \\ \angle B = \angle E \end{cases} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

题型考点: ①添加全等判定条件。

②全等判定。



知识点 04 角角边 (AAS) 判定全等

1. 概念:

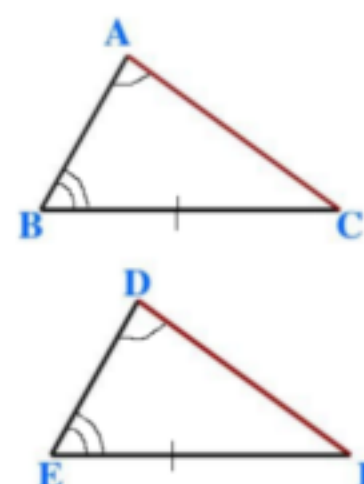
两角及其其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等。

2. 数学语言:

如图, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中:

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ BC = EF \end{cases} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

题型考点: ①添加全等判定条件。



②全等判定。

知识点 05 直角三角形的直角边与斜边 (HL) 判定全等

1. 概念:

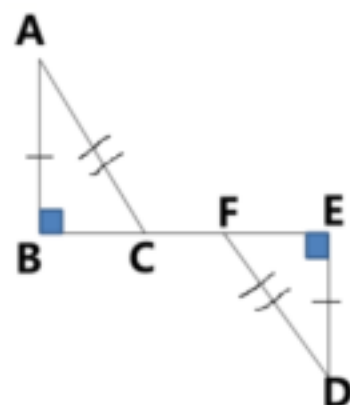
直角三角形的斜边与其中一条斜边对应相等的两个三角形全等。

2. 数学语言:

如图: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中:

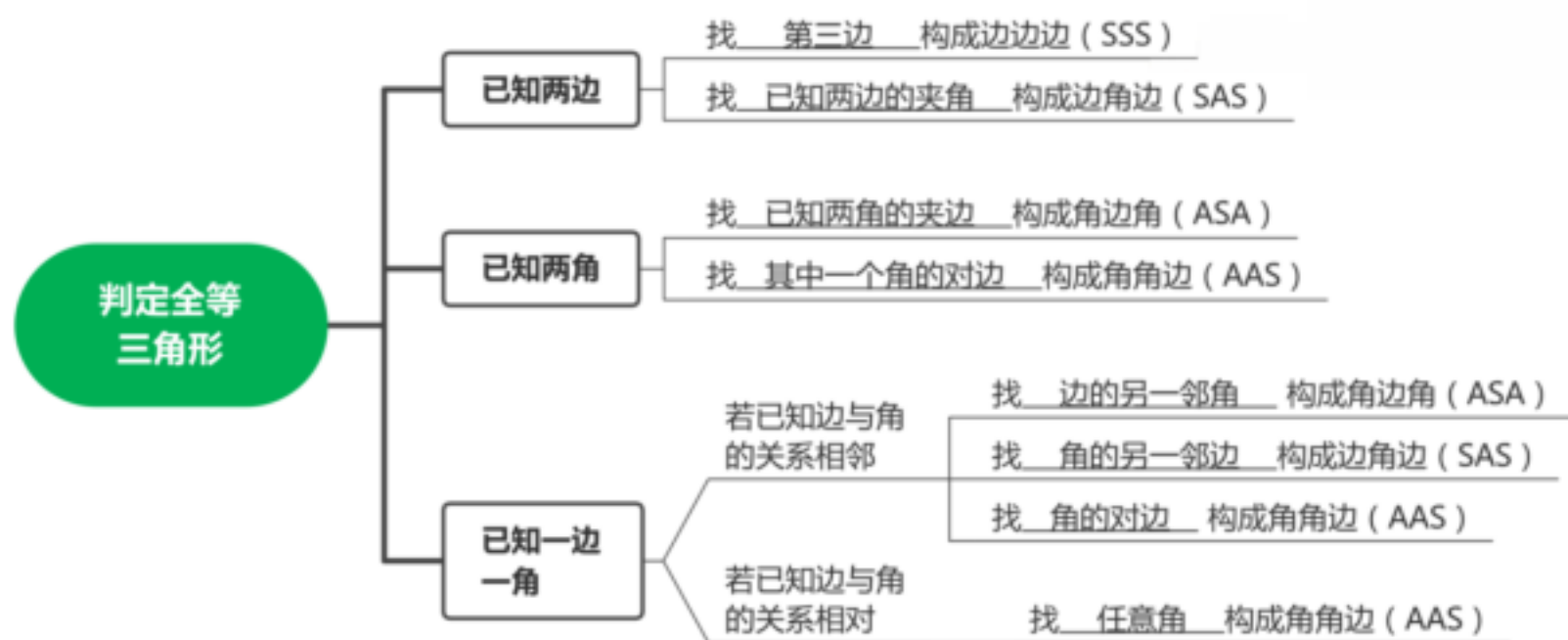
$$\begin{cases} AC = DF \\ AB = DE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF.$$



题型考点: ①添加全等判定条件。②全等判定。

寻找全等判定条件的方法总结:



第 03 讲 角的平分线

知识点 01 角平分线的定义及其性质

1. 角平分线的定义:

角的内部把角分成两个相等的角的射线这是个角的角平分线。

2. 角平分线的性质:

(1) 性质 1: 平分角。

即若 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, 则 $\angle AOC = \angle BOC$ 。且他们都等于 $\angle AOB$ 的一半。

(2) 性质 2: 角平分线上任意一点到角的两边的距离相等。

即若 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, P 是 OC 上一点, 且 $PD \perp OB$ 于点 D , $PE \perp OA$ 于点 E , 则有 $PD = PE$ 。

题型考点: ①利用角平分线的性质求线段长度或距离。②利用角平分线的性质求面积。

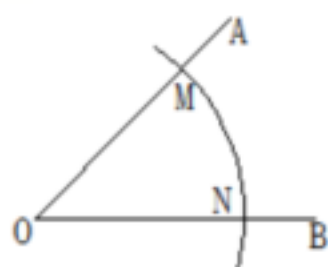
知识点 02 角平分线的尺规作图

1. 作已知角的角平分线:

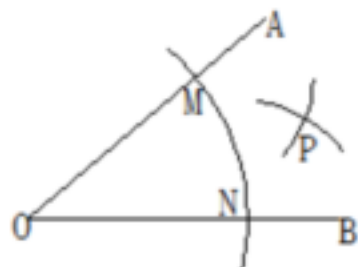
步骤一: 以角的顶点为圆心, 一定长度为半径画圆弧, 交角的两边与点 M 和点 N 。

步骤二: 以点 M 和点 N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径画圆弧, 两弧交于点 P 。

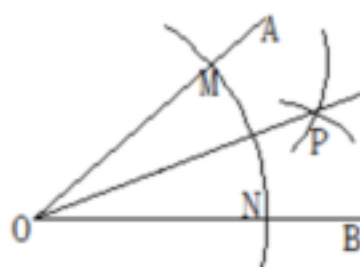
步骤三: 连接 OP 即为角平分线



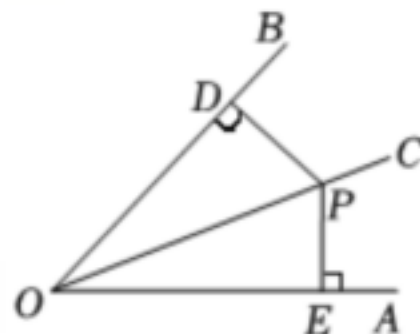
步骤一



步骤二



步骤三



2. 证明上图中的 OP 是角平分线:

连接 MP, NP

由作图过程可知, $OM=ON$, $MP=NP$ 。

在 $\triangle OMP$ 与 $\triangle ONP$ 中

$$\begin{cases} OM = ON \\ MP = NP \\ OP = OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle OMP \cong \triangle ONP$

$\therefore \angle MOP = \angle NOP$

$\therefore OP$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线。

题型考点: ①尺规作图为角平分线的依据。

②尺规作图后的有关计算。

③作图及其实际应用。

知识点 03 角平分线的判定

1. 角平分线的判定的内容:

角的内部到角两边距离相等的点一定在角平分线上。

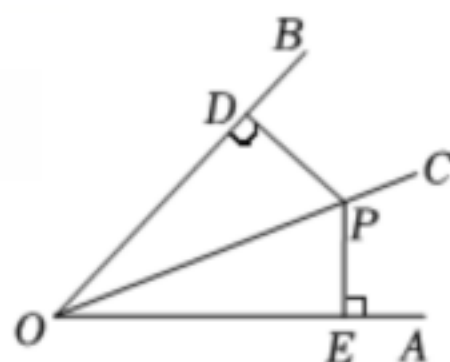
2. 数学语言:

点 P 在 $\angle AOB$ 的内部, $PE \perp OA$ 于 E, $PD \perp OB$ 于 D, 且 $PE=PD$, 则点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上。

即: $\because PE \perp OA$ 于 E, $PD \perp OB$ 于 D, 且 $PE=PD$

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$

题型考点: 角平分线的判定证明。



知识点 04 三角形的角平分线性质

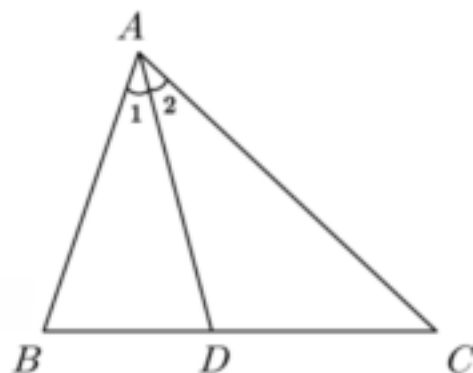
1. 三角形角平分线的性质:

三角形一个角的角平分线分得的两个三角形的面积比等于这个角的两边的比, 也等于这个角对边分得的两条线段的比。

即如图: AD 是 $\triangle ABC$ 的平分线。则 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \underline{AB:AC} = \underline{BD:CD}$ 。

特别提示: 分别以 AB 和 AC 为底、BD 和 CD 为底表示出两个三角形的面积, 然后比即可得出。

题型考点: 利用三角形角平分线的性质进行面积有关的计算。



第 15 章《轴对称》

第 01 讲 图形的轴对称

知识点 01 轴对称图形的概念

1. 轴对称图形的概念:

若一个图形沿着某条直线对折, 直线两旁的部分能够完全重合, 则这个图形是一个轴对称图形。这条直线叫做轴对称图形的对称轴。可以有多条对称轴。

题型考点: ①轴对称图形的判断。②对称轴的判断。

知识点 02 轴对称

轴对称的概念:

一个图形沿着某一条直线对折与另一个图形能够完全重合, 则这两个图形的位置关系成轴对称。这条直线是轴对称的对称轴。只有一条对称轴。

重合的边叫做对应边，重合的角叫做对应角。重合的点叫做对应点。

注意：轴对称图形是一个图形的形状特点，轴对称是两个图形的形状特点加上位置特点构成。

题型考点：①判断轴对称。

知识点 03 轴对称与轴对称图形的性质

1. 轴对称与轴对称图形的性质：

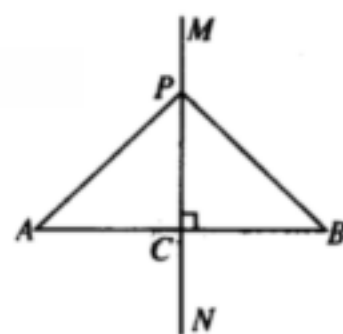
- ①轴对称图形对称轴两旁的部分全等，成轴对称的两个图形全等。
- ②对应边相等，对应角相等。对应边若不与对称轴平行，则延长线的交点一定交于对称轴上。
- ③对称轴经过任何一组对应点连线的中点且与线段垂直。
- ④对应点的连线之间相互平行。

题型考点：①对性质的理解。②利用性质计算。

知识点 04 垂直平分线

1. 垂直平分线的定义：

过线段的中点且与线段垂直的直线是这条线段的垂直平分线。如图，若 C 点是 AB 的中点，则 MN 是线段 AB 的垂直平分线。



2. 垂直平分线的性质：

- ①垂直平分线垂直且平分线段。则 $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ 。
- ②垂直平分线上任意一点到线段两端点的距离相等。即 $PA = PB$ 。所以 $\triangle PAB$ 是等腰三角形。

在 $Rt\triangle PAC$ 与 $Rt\triangle PBC$ 中

$$\begin{cases} PB = PB \\ PC = PC (\text{公共边}) \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle PAC \cong Rt\triangle PBC$$

$$\therefore \angle A = \angle B; \angle APC = \angle BPC.$$

3. 垂直平分线的判定

到线段两端点距离相等的点一定在这条线段的垂直平分线上。

题型考点：①利用垂直平分线的性质求值。②垂直平分线的判定。

第 02 讲 画轴对称图形

知识点 01 轴对称作图与轴对称图形作图

轴对称与轴对称图形的作图：

具体步骤：

- (1) 找图形的关键点。
- (2) 过关键点作对称轴的垂线并延长，使延长部分的长度等于关键点到垂足点的长度，从而得到关键点的对应点。
- (3) 按照原图形连接各对应点。

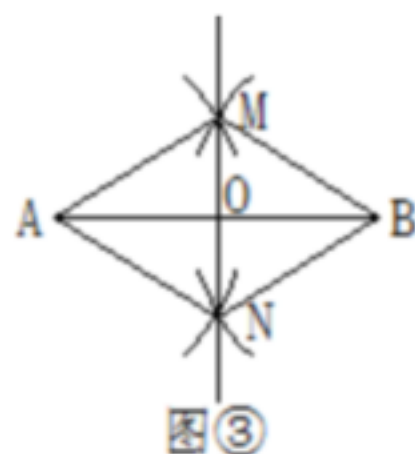
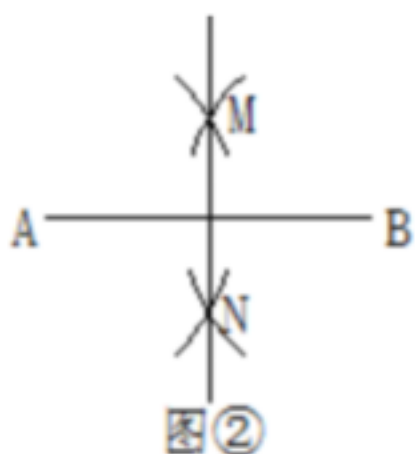
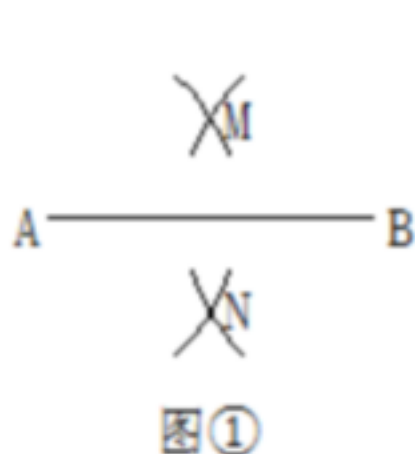
题型考点：①作图。

知识点 02 画轴对称与轴对称图的对称轴

1. 垂直平分线的画法：

具体步骤：

- (1) 如图①：分别以线段 AB 两端点为圆心，大于线段长度的一半为半径画圆弧。两弧分别交于两点 M, N。
- (2) 如图②，连接 MN，MN 所在直线即为线段 AB 的垂直平分线。



2. 垂直平分线的证明:

如图③, 连接 MA , MB , NA , NB 。由作图过程可知
 $MA=MB=NA=NB$ 在 $\triangle MAN$ 与 $\triangle MBN$ 中

$$\begin{cases} MA = MB \\ NA = NB \\ MN = MN (\text{公共边}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MAN \cong \triangle MBN \quad \therefore \angle AMO = \angle BMO$$

在 $\triangle AMO$ 与 $\triangle BMO$ 中

$$\begin{cases} AM = BM \\ \angle AMO = \angle BMO \\ MO = MO (\text{公共边}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMO \cong \triangle BMO \quad \therefore OA = OB, \quad \angle AOM = \angle BOM = 90^\circ$$

$\therefore MN$ 垂直平分 AB 。

3. 对称轴的画法:

对称轴过任意一组对应点连线的中点且与线段垂直, 所以对称轴是任意一组对应点的垂直平分线。作对称轴即是作任意一组对应点的垂直平分线。按照垂直平分线的作图即可。

题型考点: ①尺规作图垂直平分线。

②根据作图痕迹求解题目。

③画对称轴。

知识点 03 用坐标表示轴对称

1. 关于坐标轴对称的点的坐标特点:

点 $P(x, y)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x, -y)$ 。

点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x, y)$ 。

2. 关于 $x=m$ 或 $y=m$ 对称的点的坐标:

$P(a, b)$ 关于直线 $x=m$ 对称的点的坐标为 $(2m-a, b)$ 。

$P(a, b)$ 关于直线 $y=m$ 对称的点的坐标为 $(a, 2m-b)$ 。

题型考点: 根据坐标特点求坐标。

第 03 讲 等腰三角形

知识点 01 等腰三角形的性质

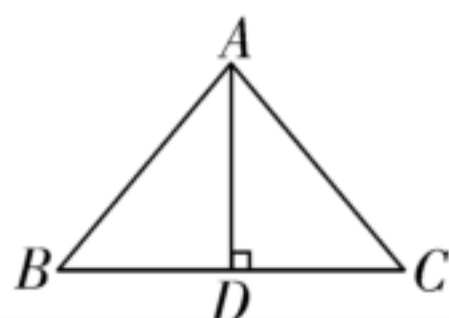
等腰三角形的概念:

有两条边相等的三角形是等腰三角形。相等的两边叫做等腰三角形的腰, 所对的角叫做等腰三角形的底角, 另一边是三角形的底, 所对的角是等腰三角形的顶角。

等腰三角形的性质: 如图

等腰三角形的两腰相等。即 $AB=AC$ 。

等腰三角形的两个底角相等。即 $\angle B=\angle C$ 。【简称: 等边对等角】



等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合。【简称底边上三线合一】即 $\angle ABD = \angle CAD$, $BD = CD$, $AD \perp BC$ 。

题型考点：①熟练性质。②利用性质计算。

知识点 02 等腰三角形的判定

1. 利用等角对等边判定：

一个三角形中如有两个角相等，则这两个角所对的两条边也相等。（等角对等边）则这个三角形是等边三角形。

2. 利用三线合一性质判定：

若三角形有一边上的中线、高线以及它对角的角平分线重合，则这个三角形是等腰三角形。

题型考点：①利用内角和公式求内角和或求多边形的边数。

②利用多边形的内外角关系计算。

第 04 讲 等边三角形

知识点 01 等边三角形的概念与性质

1 等边三角形的概念：

三条边都相等的三角形叫做等边三角形，等边三角形是特殊的等腰三角形。

2. 等边三角形的性质：如图

①等边三角形的三条边都相等，三个角也相等，且三个角都等于 60° 。

②等边三角形三条边都存在三线合一。

③等边三角形是一个轴对称图形，它有 3 条对称轴，对称轴的交点叫做中心。

题型考点：①等边三角形的性质求角度与线段。

知识点 02 含 30° 角的直角三角形

1. 30° 角所对的直角边与斜边的关系：

30° 角所对的直角边等于斜边的一半。证明如下：

如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AD \perp BC$ 。证明 $BD = \frac{1}{2} AB$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore AB = BC = AC$, $\angle BAC = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 。

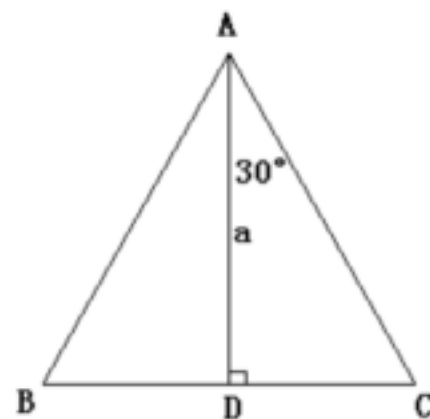
$\because AD \perp BC$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$

$$BD = CD = \frac{1}{2} BC$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB。$$

题型考点：含 30° 角的直角三角形的性质。



知识点 03 等边三角形的判定

1. 等边三角形的判定：

①定义判定：三条边都相等的三角形是等边三角形。

②判定定理 1：三个角相等的三角形是等边三角形。或有两个角是 60° 的三角形是等边三角形。

③判定定理 2：有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。

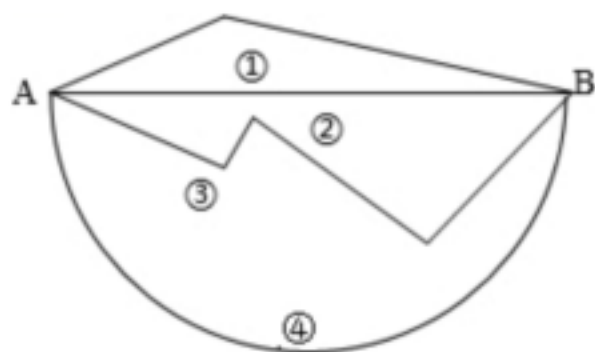
题型考点：等边三角形判定证明。

第 05 讲 最短路径

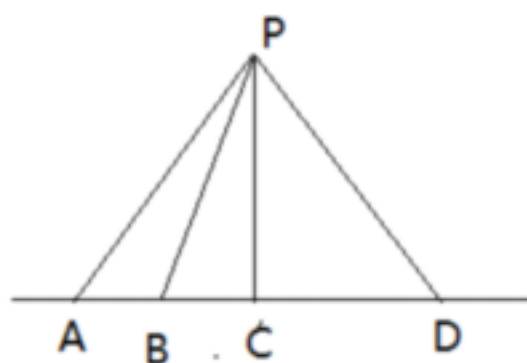
知识点 01 最短路径的基本原理

1. 最短路径的基本原理:

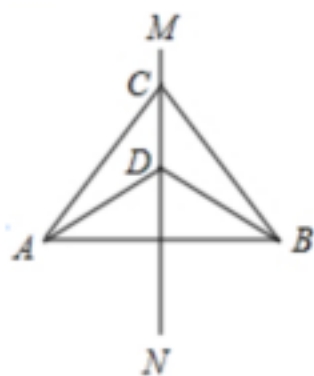
①两点之间, 线段最短。如图, ②号线最短



②点到直线的距离最短。如图, PC 最短。



③垂直平分线上任意一点到线段两端点的距离相等。如图, MN 是垂直平分线, $CA = CB$ 。



知识点 02 最短路径的基本类型 1——直线上一点到同侧两点的距离之和最短

1. 如图, 存在直线 l 以及直线外的点 P 和点 Q , 直线 l 上存在一点 M , 使得 $MP + MQ$ 的值最小:

方法点拨: 作其中一点关于直线的对称点, 连接对称点与另一点, 线段与直线的交点即为要找的点 M 。

解: 如图, 作点 P 关于直线 l 的对称点 P' 。连接 $P'Q$, $P'Q$ 与直线 l 交于点 M , 则此时 $MP + MQ$ 最小。

证明: $\because P$ 与 P' 关于直线 l 对称

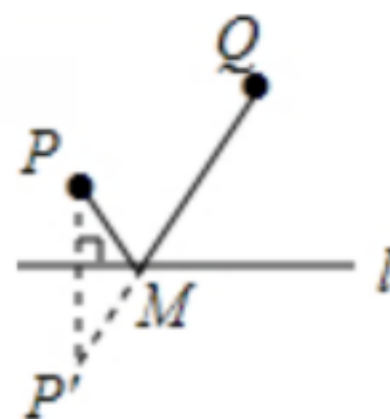
\therefore 直线 l 是 PP' 的垂直平分线

$\therefore MP = MP'$

$\therefore MP + MQ = MP' + MQ = P'Q$ 。

$\therefore MP + MQ$ 此时有最小值, 为 $P'Q$ 的长度

题型考点: ①基本作图。②求值计算。



知识点 03 最短路径基本类型——角内一点与角两边构成的三角形周长最短

1. 如图, 已知 $\angle MON$ 以及角内一点 P , 角的两边 OM 与 ON 上存在点 A 与点 B , 使得 $\triangle PAB$ 的周长最小:

方法点拨: 分别作点 P 关于 OM 与 ON 的对称点 P' 与 P'' , 连接 $P'P''$ 。 $P'P''$ 与 OM 、 ON 的交点 A 与 B 即为要找到点。

解: 如图, 分别作点 P 关于 OM 与 ON 的对称点 P' 与 P'' , 连接 $P'P''$ 。 $P'P''$ 与 OM 、 ON 的分别交于点 A 与点 B , 连接 PA 、 PB 以及 AB , 此时 $\triangle PAB$ 的周长最小。

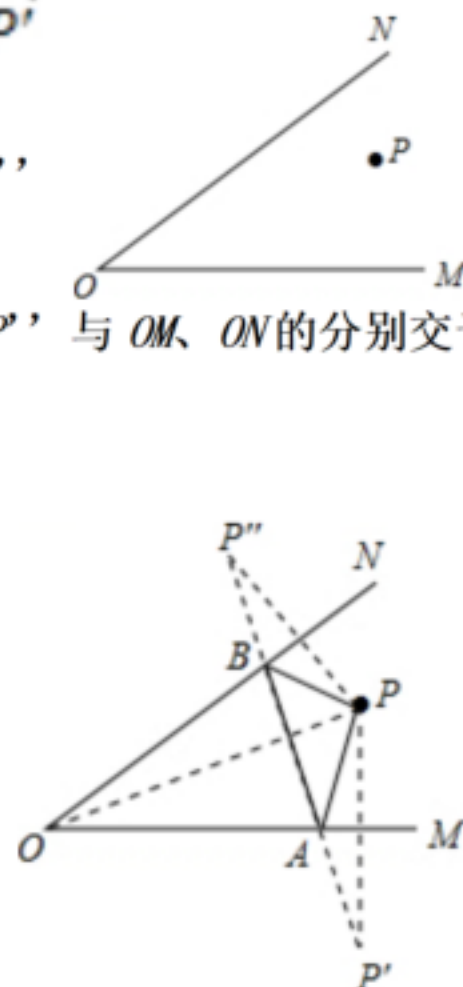
证明: $\because P$ 与 P' 关于 OM 对称, P 与 P'' 关于 ON 对称

$\therefore OM$ 是 PP' 的垂直平分线, ON 是 PP'' 的垂直平分线。

$\therefore AP = AP'$, $BP = BP''$

$\therefore C_{\triangle PAB} = PA + AB + PB = AP' + AB + BP'' = P'P''$

$\therefore \triangle PAB$ 的周长最小。



题型考点：①基本作图。②求值计算。

知识点 04 最短路径基本类型——角内两点与角两边构成的四边形周长最短

1. 如图：已知 $\angle AOB$ 以及角内两点 P 与点 Q ，角的两边上分别存在 M 、 N 使得四边形 $PQMN$ 的周长最小：

方法点拨：分别作点关于较近直线的对称点，连接两个对称点的线段与边 OA 与交与点 M 与点 N ，此时点 M 与点 N 即为要找的点。

解：如图，作点 Q 关于 OA 的对称点 D ，点 P 关于 OB 的对称点 C ，连接 DC ， DC 与 OA 交于点 M ，与 OB 交于点 N ，连接 QM ， MN ， PN ， PQ 。此时四边形 $PQMN$ 的周长最下。

证明： $\because Q$ 与 D 关于 OA 对称， P 与 C 关于 OB 对称

$\therefore OA$ 是 QD 的垂直平分线， OB 是 PC 的垂直平分线。

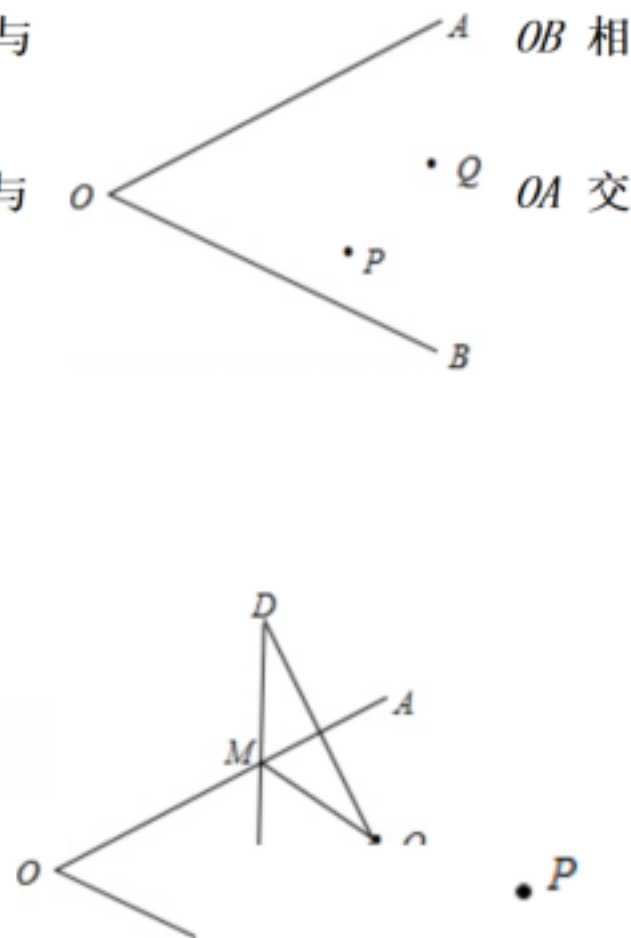
$\therefore MD=MQ$ ， $NP=NC$ 。

$$C_{\text{四边形}PQMN} = PQ + QM + MN + PN$$

$$= PQ + MD + MN + NC$$

$$= PQ + DC。$$

\therefore 四边形 $PQMN$ 的周长最小。

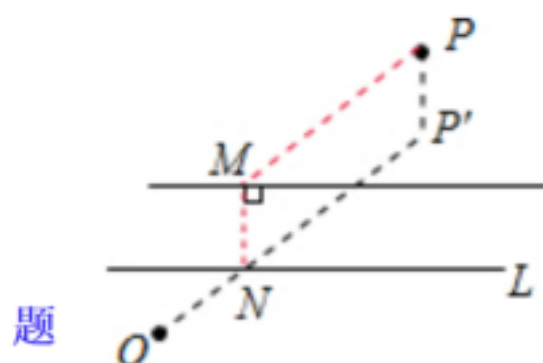


题型考点：①基本作图。

知识点 05 最短路径基本类型——造桥选址问题

如图：平行河岸两侧各有一村庄 P 、 Q ，现在河上修建一座垂直于河岸的桥，使得村庄 P 到村庄 Q 的路程最短：

方法点拨：在其中一个村庄作垂直于河岸的直线，使其长度等于桥的长度，连接端点与另一村庄，直线与另一村庄岸边的交点即为选址地点。如下图：



题型考点：①基本作图。

第 16 章《整式的乘法》

第 01 讲 幂的运算

知识点 01 同底数幂的乘法

1. 同底数幂的概念：

底数相同的幂叫做同底数幂。

2. 同底数幂的乘法：

同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

$$\text{即 } a^m \cdot a^n = a^{m+n}。 (m、n \text{ 都是正整数})$$

$$\text{推广： } a^m \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^p = a^{m+n+\dots+p}。 (m、n \dots p \text{ 都是正整数})$$

底数可以是数，可以是式子。若底数是多项式时，用括号括起来看成整体。指数是 1 时不能忽略。

3. 同底数幂的乘法的逆运算：

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n。 (m、n \text{ 都是正整数})$$

题型考点：①同底数幂的乘法计算。②利用运算法则求值。③同底数幂的逆运算。

知识点 02 幂的乘方

1. 幂的乘方的运算：

幂的乘方的运算法则，底数不变，指数相乘。

$$\text{即 } (a^m)^n = a^{mn}。 (m、n \text{ 都是正整数})$$

$$\text{推广: } \left[(a^m)^n \right]^p = a^{mnp}。 (m、n、\dots、p \text{ 都是正整数})$$

2. 逆运算:

$$a^{mn} = \left(a^m \right)^n = \left(a^n \right)^m。 (m、n \text{ 都是正整数})$$

题型考点: ①幂的乘方的运算。②利用运算法则与逆运算求值。

知识点 03 积的乘方

1. 轴对称与轴对称图形的性质:

积的乘方等于乘法的积。即把积中的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。

$$\text{即: } (ab)^m = a^m \cdot b^m。 (m \text{ 为正整数})$$

$$\text{推广: } (abc)^m = a^m b^m c^m。 (m \text{ 为正整数})$$

2. 逆运算:

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m。 (m \text{ 为正整数})$$

题型考点: ①积的乘方的运算。②利用运算法则与逆运算求值。

知识点 04 同底数幂的除法

1. 同底数幂的除法运算法则:

同底数幂相除，底数不变，指数相减。

$$\text{即: } a^m \div a^n = a^{m-n}。 (a \neq 0, m、n \text{ 为正整数, 且 } m > n)$$

$$\text{推广: } a^m \div a^n \div a^p = a^{m-n-p}。 (a \neq 0, m、n、p \text{ 为正整数且 } m > n+p)$$

2. 逆运算:

$$a^{m-n} = a^m \div a^n。 (a \neq 0, m、n \text{ 为正整数})。$$

题型考点: ①同底数幂的除法运算。②运用运算法则与逆运算求值。

知识点 05 0 次幂与负整数指数幂

1. 0 次幂的计算:

任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1。即: $a^0 = 1$ 。 ($a \neq 0$)

$$\text{证明: } a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0。$$

\because 相等的两数 (都不为 0) 的商等于 1

$$\therefore a^m \div a^m = 1 \quad \therefore a^0 = 1$$

2. 负整数指数幂的计算:

一个数的负整数指数幂等于这个数的正整数指数幂的倒数。即: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。 ($a \neq 0$) 证明:

$$a^2 \div a^4 = \underline{a^{2-4}} = \underline{a^{-2}}.$$

$a^2 \div a^4$ 写成分数的形式为计算:

$$\text{即: } a^2 \div a^4 = \frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

$$\therefore a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

题型考点: ①0 次幂的计算与负整数指数幂的计算。

第 02 讲 整式的乘法

知识点 01 单项式×单项式

单项式×单项式的运算法则:

系数**相乘**, 同底数幂分别**相乘**。对于只在一个单项式里面出现的字母, 连同它的**指数**作为积的一个因式。

$$\text{如: } -3a^2b^2 \cdot 2a^2 = (-3 \times 2) \cdot (a^2 \cdot a^2) \cdot b^2 = -6a^4b^2$$

题型考点: ①单项式×单项式的计算。

知识点 02 单项式×多项式

1. 单项式×多项式的运算法则:

单项式与多项式相乘, 用单项式去乘多项式的**每一项**。再把所得的积**相加**。若有同类项, 则一定要合并同类项。

$$\text{说明: } (-2a^2) \cdot (3ab^2 - 5ab^3) = -2a^2 \cdot 3ab^2 + (-2a^2) \cdot (-5ab^3)$$

题型考点: ①单项式×多项式的计算。

知识点 03 多项式×多项式

1. 多项式×多项式的运算法则:

用一个多项式的**每一项**乘以另一个多项式的**每一项**, 再把所得的积**相加**。若有同类项, 一定合并同类项。

说明:

$$\begin{aligned} (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) &= x \cdot x^2 + x \cdot (-2xy) + x \cdot 4y^2 + 2y \cdot x^2 + 2y \cdot (-2xy) + 2y \cdot 4y^2 \\ &= x^3 - 2x^2y + 4xy^2 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 \\ &= x^3 + 8y^3 \end{aligned}$$

题型考点: ①多项式×多项式的计算。

知识点 04 整式的除法

1. 单项式÷单项式的运算法则:

单项式除以单项式, 系数**相除**, 同底数幂**相除**。对于只在被除式里面出现的字母, 连同它的**指数**作为商的一个因式。对于只在除数式里面出现的字母, 连同它的指数作为商的分母。

$$\text{说明: } 4a^2b \div 2a = (4 \div 2) \cdot (a^2 \div a) \cdot b = 2ab$$

2. 多项式÷单项式的运算法则:

多项式÷单项式, 用多项式的**每一项**去除以单项式, 再把得到的商相加。

说明:

$$\begin{aligned} (m^2n + 2m^3n - 3m^2n^2) \div m^2n &= m^2n \div m^2n + 2m^3n \div m^2n - 3m^2n^2 \div m^2n \\ &= 1 + 2m - 3n \end{aligned}$$

题型考点：①单项式÷单项式、多项式÷单项式的计算。

第 03 讲 乘法公式

知识点 01 平方差公式

1. 平方差公式的内容：

两个数的和乘以两个数的差=这两个数平方的差，即 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

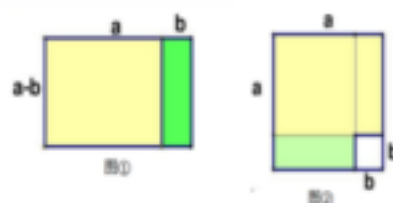
注意：可以是两个相等的数，也可以是两个相同的式子。用符号相同项的平方减去符号相反项的平方。

2. 式子特点分析：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ：两个二项式相乘，若其中一项相同，另一项互为相反数，则等于他们相同项的平方减去互为相反数项的平方。

3. 平方差公式的几何背景：

如图：将图①的蓝色部分移到图②的位置。图①的面积为： $(a+b)(a-b)$ ；图②的面



积为： a^2-b^2 ；图①与图②的面积相等。所以 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

题型考点：①平方差公式的计算。②利用平方差公式求值。③平方差公式的几何背景应用。④利用平方差公式简便计算。

知识点 02 完全平方公式

1. 完全平方公式的内容：

①完全平方和公式：

两个数的和的平方，等于这两个数的平方的和加上这两个数乘积的两倍。

即： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。可以是两个数，也可以是两个式子。

②完全平方差公式：

两个数的差的平方，等于这两个数的平方的和减去这两个数的乘积的两倍。即： $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

可以是两个数，也可以是两个式子。

2. 式子特点分析：

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ：一个二项式的平方，等于这个二项式的两项的平方的和加上这两项的两倍。

注意每一项都包含前面的符号。

巧记：首平方加尾平方，首位两倍放中央。

3. 完全平方公式的几何背景：

图 1 中面积的整体表示为： $(a+b)^2$

用各部分面积之和表示为： $a^2+2ab+b^2$

所以 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

用同样的方法表示图 2 的面积即可得到：

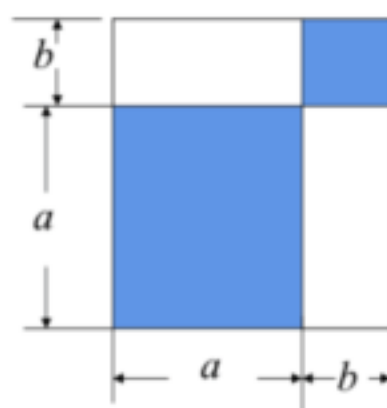


图 1

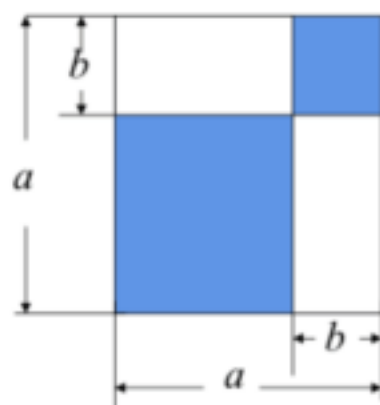


图 2

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

4. 完全平方和公式与完全平方差公式的转化：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\because a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\therefore (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

题型考点：①完全平方公式的计算。②利用完全平方公式求值。③完全平方公式的几何背景。

知识点 03 完全平方方式

1. 完全平方方式的定义：

若一个整式 A ，可以写成另一个整式 B 的平方的形式，即 $A = B^2$ ，则我们称整式 A 是一个完全平方方式。

2. 式子特点分析：

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ：一个三项式，其中两项可以写成平方的形式，第三项是平方两项底数乘积的两倍，则可以写成底数和或底数差的平方。若第三项与平方两项的符号相同，则是底数和的平方，若第三项与平方两项的符号相反，则是底数差的平方。

题型考点：①平方方式写成平方的运算。②根据完全平方方式的特点求值。

知识点 04 乘法公式的拓展应用

1. 平方差公式的拓展：

两个三项式相乘，若他们的项中只存在相等的项和互为相反数的项，则可以用平方差公式计算。它等于相等项的平方减去相反数项的平方。把相等项或相反数项存在两项的看成一个整体。

$$\text{即：}(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2。$$

2. 完全平方公式的拓展：

一个三项式的平方，可以把前两项看成首项或后两项看成尾项，然后利用完全平方公式的计算方法计算。把其中两项看成一个整体。

$$\text{即：}(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$$

题型考点：①拓展应用。

第 17 章《因式分解》

第 01 讲 用提公因式法分解因式

知识点 01 分解因式的概念

1. 分解因式的概念：

把一个多项式写成几个整式的积的形式，这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。与整式的乘法互为逆运算。

$$m(a+b+c) \xrightarrow{\text{(整式的乘法)}} ma+mb+mc \xrightarrow{\text{(因式分解)}} m(a+b+c)$$

左边是一个多项式，右边是几个整式的积的形式，即右边的加减号必须在括号内。且左右两边必须相等。

题型考点：①判断式子的运算属于因式分解。

知识点 02 公因式

1. 公因式的概念：

多项式中各项都有的因式叫做这个多项式的公因式。如多项式 $ma+mb+mc$ ，各项都有一个公因式 m ，则它就是这个多项式的公因式。

2. 公因式的求法：

公因式=系数的最大公约数×相同字母（式子）的最低次幂。若多项式首项为负号，则公因式为负。

3. 多项式提取公因式后的另一个因式的求法：

多项式提取公因式后，另一个因式=多项式的每一项÷公因式。

题型考点：①判断多项式的公因式。②求多项式提取公因式的另一个因式。

知识点 03 提公因式分解因式

1. 提公因式分解因式：

一般地，如果多项式的各项都有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法。

题型考点：①提公因式分解因式。

第 02 讲 用公式法分解因式

知识点 01 平方差公式分解因式

1. 平方差公式分解因式的内容：

两个数的平方差等于这两个数的和乘以这两个数的差。

$$\text{即： } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

2. 式子特点分析与因式分解结果：

①式子特点分析：式子是一个二项式，符号相反且都可以写成平方的形式。

②因式分解结果：等于写成平方形式时的底数的和乘以底数的差。

考点题型：①判断式子能否用平方差公式分解。②利用平方差公式分解因式。

知识点 02 完全平方公式分解因式

1. 完全平方公式分解因式的内容：

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2。$$

2. 式子特点分析与因式分解结果：

①式子特点分析：式子是一个三项式，其中两项符号相同且都能写成平方的形式，第三项是平方两项底数乘积的两倍。

②因式分解结果：等于底数和的平方或底数差的平方。若第三项与平方两项符号相同，则等于底数和的平方，若第三项与平方两项符号相反，则等于底数差的平方。若平方两项是符号，则在括号前添加负号。

题型考点：①判断式子能否用平方差公式分解。②利用平方差公式分解因式。③求值

第 03 讲 用十字相乘法分解因式

知识点 01 十字相乘法分解因式

1. 十字相乘法分解因式：

对于一个二次三项式 ax^2+bx+c ，若存在 $a=a_1 \cdot a_2$ ， $c=c_1 \cdot c_2$ ，且 $a_1c_2+a_2c_1=b$ ，那么二次三项式

$ax^2 + bx + c$ 可以分解为: $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$

举例说明: $2x^2 + 5x + 3$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 = 3 \\ \times & \times \\ 1 & 1 = 2 \end{array} \quad 3 + 2 = 5. \therefore 2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

对于初中所用的十字相乘法,二次项系数 a 都是等于 1 的,即 $x^2 + bx + c$ 。若存在有 $c = c_1 \cdot c_2$, 且 $c_1 + c_2 = b$,

则 $x^2 + bx + c$ 可分解为: $x^2 + bx + c = (x + c_1)(x + c_2)$

举例说明: $x^2 + 7x + 12$

$$\because 12 = 3 \times 4 \text{ 且 } 3 + 4 = 7$$

$$\therefore x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

题型考点: ①十字相乘法分解因式。②根据十字相乘法分解因式求值。

第 04 讲 因式分解的应用

知识点 01 分组分解因式

分组分解因式:

对于四项或者超过四项的多项式分解时,我们通常要对其进行分组,使其分在同一组的项能够使用提公因式法或公式法或者式子相乘法进行分解。从而达到对整个多项式进行分解的目的。

考点题型: ①分组分解因式。

知识点 02 实数范围内分解因式

1. 实数范围反内分解因式:

一些式子在有理数的范围内无法分解因式,可是在实数范围内就可以继续分解因式,实数范围内分解因式是指可以把因式分解到实数的范围,既可以用无理数来表示。

题型考点: ①实数范围内分解因式。

知识点 03 因式分解的综合应用

因式分解的步骤:

第一步: 观察式子是否有公因式可提。若有公因式,则先用公因式进行因式分解。

第二步: 观察式子项数:

①若式子是两项,则观察是否具有平方差公式的特点,若具有平方差公式的特点则用平方差公式分解,若不具有则不能分解。

②若式子是三项,则观察是否具有完全平方公式的特点,如果具有完全平方公式的特点则用完全平方公式分解。若不具有完全平方公式的特点则观察是否可用十字相乘法分解,若能则用十字相乘法分解,若不能用十字相乘法分解则多项式不能分解。

因式分解一定要分解彻底,即无论用什么方法都不能再继续分解。

题型考点: ①分解因式。

知识点 04 因式分解的综合应用

1. 因式分解的综合应用:

利用因式分解解决求值问题。

利用因式分解解决证明问题。

利用因式分解解决计算问题。

题型考点: ①因式分解的实际应用。

第 18 章《分式》

第 01 讲 分式及其基本性质

知识点 01 分式的概念

分式的概念:

一般地, 若 A 与 B 均是整式且 B 中含有字母, 那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 叫做分子, B 叫做分母。

分式满足的三个条件:

①式子一定是 $\frac{A}{B}$ 的形式;

② A 与 B 一定是整式;

③ B 中一定含有字母。

简单理解: 分母中含有字母的式子就是分式。

题型考点: ①分式判断。

知识点 02 分式有意义的条件

1. 分式有意义的条件:

即要求分式的分母不能为 0。即 $\frac{A}{B}$ 中, $B \neq 0$ 。若分母能够进行因式分解, 现将分母进行因式分解, 让每一个因式都不为 0。

题型考点: ①根据分式有意义的条件求值。

知识点 03 分式的值

1. 分式的值为 0 的条件:

分式的值为 0 的条件为要求分子必须为 0, 同时要求分母不为 0。

即 $\frac{A}{B}$ 中, $A=0$, $B \neq 0$ 。

对能分解因式的分子分母进行因式分解, 让分子里面的所有因式的值等于 0, 让分母里面所有因式的值不等于 0。

题型考点: ①分式值为 0 的条件。

知识点 04 分式的性质

1. 分式的性质的基本内容:

分式的分子与分母乘 (或除以) 同一个不等于 0 的整式, 分式的值不变。

2. 式子表达:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} \quad (A, B, C \text{ 均是整式且 } C \neq 0)$$

3. 分式的符号改变法则:

分式的分子, 分母以及分式本身均有符号, 改变其中任意两个符号分式不会发生改变。

$$\text{即: } \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

题型考点: ①分式基本性质的应用。

知识点 01 公因式

1. 公因式的概念:

一个分式中, 分子分母都含有的因式叫做分子分母的公因式。

2. 公因式的求法:

对分子分母进行因式分解, 然后求出系数的最大公因数与相同式子的最低次幂。他们的乘积为公因式。

题型考点: ①求分子分母的公因式。

知识点 02 最简分式

1 最简分式的概念:

分子分母没有公因式的分式叫做最简公因式。

题型考点: ①判断最简分式。

知识点 03 约分

1 约分的概念:

根据分式的基本性质, 把分子分母的公因式约去, 这个过程叫约分。

2 约分的步骤:

①对分式中能因式分解的分子或分母先进行因式分解。

②约去分子分母的公因式即可。

题型考点: ①约分。

知识点 04 最简公分母与通分

1 通分的概念:

根据分式的基本性质, 把几个异分母的分式分别化成与原来分式值相等的同分母的分式的过程叫做通分。

这个相同的分母叫做最简公分母。

2 最简公分母的求法:

最简公分母=所有系数的最小公倍数×所有因式的最高次幂。对能进行因式分解的分母先因式分解, 在确定所含有的因式。

3 通分的步骤:

①将所有能分解因式的分母分解因式。

②求出最简公分母。

③利用分式的性质在分子分母上同时乘一个因式, 使分母变成最简公分母。

题型考点: ①求公分母。②对分式进行通分。

第03讲 分式的运算

知识点 01 分式的乘法运算

1 分式的乘法运算法则:

同分数的乘法运算法则, 分子乘分子作为积的分子, 分母乘分母作为积的分母。

$$\text{即: } \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

2 具体步骤:

①对能因式分解的分子分母进行因式分解。

②分子分母有公因式的要先约分, 所有的分母可以和所有的分子进行约分。

③再用分子乘分子得到积的分子, 分母乘分母得到积的分母。

题型考点: ①分式的乘法运算。

知识点 02 分式的除法运算

分式的除法运算法则:

除以一个分式等于乘上这个分式的倒数式。变成乘法运算。

$$\text{即: } \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}.$$

题型考点：①分式的除法运算。

知识点 03 分式的乘方运算

分式的乘方的运算法则：

一般地，当 n 为正整数时， $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B} (n \text{ 个}) = \frac{A \cdot A \cdot \dots \cdot A (n \text{ 个})}{B \cdot B \cdot \dots \cdot B (n \text{ 个})} = \frac{A^n}{B^n}$ 。即把分式的分子分母分

别乘方运算。

题型考点：①分式的乘方运算。

知识点 04 分式的加减法运算

分式的加减法运算法则：

①同分母的分式相加减：分母不变，分子相加减。

②异分母的分式相加减：先通分，变成同分母的分式的加减运算，在按照同分母的加减运算法则运算即可。

具体步骤：

第一步：通分：将异分母分式转化为同分母分式。

第二步：加减：分母不变，分子相加减。

第三步：合并：分子去括号，然后合并同类项。

第四步：约分：分子分母进行约分，把结果化成最简分式。

分式的加减运算中，若出现有一部分是整式，则通常把整式部分看成一个整体。

题型考点：①分式的加减运算。

知识点 05 用科学计数法表示较小的数

1. 科学计数法表示较小的数的方法：

用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $|a|$ 的取值范围为 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定。

题型考点：①用科学计数法法表示较小的数。

第 04 讲 分式方程

知识点 01 分式方程的概念

1. 分式方程的概念：

分母中含有未知数的方程叫做分式方程。

题型考点：①判断分式方程。

知识点 02 解分式方程

1 解分式方程的基本思路：

去分母：分式方程的两边同时乘以分母的最简公分母。使分式方程转化为整式方程再进行求解。

2 解分式方程的基本步骤：

①去分母：分式方程的左右两边乘以分母的最简公分母，将分式方程转化为整式方程。

②解整式方程：

③检验：将解出的整式方程的解带入最简公分母中，若最简公分母不为 0，则整式方程的解就是分式方程的解。若最简公分母为 0，则整式方程的解是分式方程的增根，原分式方程无解。

④写解：根据检验的情况写出分式方程的解。

注意解分式方程一定要检验。

题型考点：①解分式方程。②分式方程的增根与无解。③分式方程的特殊解

知识点 03 列分式方程解实际应用题

列分式方程解实际应用题的基本步骤：

- ①审：仔细审题，审清题意，找出题目中已知量与未知量的等量关系。
- ②设：设出未知数。
- ③列：列出分式方程。
- ④解：解分式方程。
- ⑤验：检验求出的解是不是分式方程的解，也要检验这个解是否符合实际问题。
- ⑥答：写出答案。

题型考点：①由实际问题抽象出分式方程。②列分式方程解决实际问题。

VV99.net

免费文档下载